

**Zad. 1**    Pokaż, że dla każdego borelowskiego  $B \subseteq \mathbb{R}$  i dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje zbiór borelowski ograniczony  $A \subseteq \mathbb{R}$  taki, że  $A \subseteq B$  i  $\lambda(B \setminus A) < \varepsilon$ .

**Zad. 2**    Pokaż, że dla każdego borelowskiego  $B \subseteq \mathbb{R}$  i dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje zbiór zwarty  $K \subseteq \mathbb{R}$  taki, że  $K \subseteq B$  i  $\lambda(B \setminus K) < \varepsilon$ .

**Zad. 3**    Udowodnij, że nie istnieje  $\sigma$ -algebra, która jest nieskończona i przeliczalna.

**Zad. 4**    Znajdź miarę zbioru  $A \subseteq [0, 1]$  złożonego z tych liczb, które w rozwinięciu dziesiętnym nie zawierają cyfry 7.

**Zad. 5**    Znajdź przykład zbioru  $A \subseteq \mathbb{R}$  takiego, że naraz spełnione są warunki

- $\lambda(\text{Int}(A)) = 2$ ,
- $\lambda(A) = 5$ ,
- $\lambda(\overline{A}) = 10$ .

**Zad. 6**    Pokaż, że poniższe warunki są równoważne temu, że funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest borelowska:

- $f^{-1}[U]$  jest borelowski dla każdego otwartego  $U \subseteq \mathbb{R}$ .
- $f^{-1}[F]$  jest borelowski dla każdego domkniętego  $F \subseteq \mathbb{R}$ .
- $f^{-1}[(a, b)]$  jest borelowski dla każdego  $a < b$ .
- $f^{-1}[(q, \infty)]$  jest borelowski dla każdego  $q \in \mathbb{Q}$ .

Wymień jeszcze parę innych warunków równoważnych borelowskości funkcji.

**Zad. 7**    Pokaż, że następujące funkcje są borelowskie. (Uwaga: żeby sprawdzić, że dany przeciwobraz jest borelowski, niekoniecznie trzeba go znaleźć).

$$f(x) = \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x > 0, \\ 0, & \text{gdy } x = 0, \\ -1, & \text{gdy } x < 0. \end{cases}$$

$$g(x) = \text{sgn}(\sin(x))$$

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \leq 0, \\ \sin(\frac{1}{x}), & \text{gdy } x > 0. \end{cases}$$

$$i(x) = \begin{cases} x^2 - e^x & \text{gdy } x \in \mathbb{Q}, \\ \log(|x| + 1)^4 & \text{gdy } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$