Analiza i Topologia R Lista 7 7 XII 2018

Zad. 1 Pokaż, że X jest przestrzenią Banacha wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum_i x_i$ jest zbieżny, jeśli tylko jest bezwględnie zbieżny tzn. $\sum_i ||x_i||$ jest zbieżny.

Zad. 2 Które z poniższych podzbiorów $C[0,1]$ są wypukłe?

- $\{f\colon f(1) < 5\}$,
- $\{f\colon f \text{ jest różniczkowalna}\}$,
- $\{f\colon f \text{ nie jest różniczkowalna}\}$.

Zad. 3 Niech $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ będzie przestrzenią unitarną. Wyjaśnij, dlaczego jest ona przestrzenią metryczną. Dlaczego próba definicji iloczynu skalarnego na zbiorze (a nie przestrzeni liniowej) nie miałaby sensu?

Zad. 4 Pokaż, że na $C[0,1]$ nie da się określić iloczynu skalarnego zgodnego z normą supremum tzn. takiego $\langle\cdot,\cdot\rangle$, że $||f||_{\sup} = \sqrt{\langle f, f\rangle}$ dla każdego $f \in C[0,1]$. (Wskazówka: użyj równości równoległoboku). Wywnioskuj, że przestrzeń $C[0,1]$ z metryka supremum nie jest przestrzenią unitarną.

Zad. 5 Pokaż, że dla wektorów x, y w przestrzeni unitarnej X następujące warunki są równoważne:

a) $x \perp y$,

b) $||x + \lambda y|| = ||x - \lambda y||$ dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$,

c) $||x + \lambda y|| \geq ||x||$ dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$.

Zad. 6 Zapisz twierdzenie Pitagorasa dla wybranych przez siebie funkcji z $C_2[0,1]$.

Zad. 7 Oblicz $\langle f, g\rangle$ w $C[0,1]$ z normą $||\cdot||_2$, gdzie

a) $f(x) = x$, $g(x) = x^2$,

b) $f(x) = e^x$, $g(x) = x$.

Zad. 8 Oblicz kąt między ciągami $(\frac{1}{2^n})$ i $(\frac{1}{3^n})$ w ℓ_2.

Zad. 9 Odwołując się do przestrzeni euklidesowych, zdefiniuj, co to jest rzut wektora x na prostą $\{a\cdot y\colon a \in \mathbb{R}\}$ rozpinaną przez wektor y w przestrzeni unitarnej. Znajdź rzut funkcji $f(x) = x^2$ na prostą rozpinaną przez $g(x) = \sin x$ w przestrzeni $C(-\pi, \pi)$.

Zad. 10 Pokaż, że funkcje postaci $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx$ i $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx$ tworzą układ ortonormalny w $C(-\pi, \pi)$ ze standardowym iloczynem sklaranym.

Zad. 11 Zapisz szeregi Fouriera funkcji na $(-\pi, \pi)$

a) $f(x) = |x|$,

b) $f(x) = x^2$.