Analiza i Topologia R **Lista 6** 23 XI 2018

Zad. 1 Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Powiemy, że rodzina $\mathcal{B}$ zbiorów otwartych jest *bazą* w tej przestrzeni, jeżeli każdy zbiór otwarty jest sumą pewnych elementów rodziny $\mathcal{B}$. Pokaż, że następujące rodziny są bazami w podanych przestrzeniach:

a) $\{(p, q) \colon p, q \in \mathbb{Q}\}$ na prostej z metryką euklidesową.

b) $\{(a, b) \times (c, d) \colon a < b, c < d, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ na płaszczyźnie z metryką euklidesową.

c) $\{(p, q) \times (r, s) \colon p < q, r < s, p, q, r, s \in \mathbb{Q}\}$ na płaszczyźnie z metryką euklidesową.

d) $\{(p, q) \colon p < q, p, q$ są diadycznie wymierne$\}$ na prostej z metryką euklidesową.

e) „cząstki" zbioru Cantora w zbiorze Cantora.

Uwaga: liczby diadycznie wymierne to liczby postaci $\frac{k}{2^n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Zad. 2 Niech $f \colon X \to Y$ będzie funkcją (X, Y to oczywiście przestrzenie metryczne). Załóżmy, że $\mathcal{B}$ jest bazą w przestrzeni Y. Pokaż, że f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, kiedy $f^{-1}[B]$ jest otwarty dla każdego $B \in \mathcal{B}$.

Zad. 3 Pokaż, że jeżeli przestrzeń X ma bazę przeliczalną, to jest ośrodkowa.