Analiza i Topologia R **Lista 5** 16 XI 2018

Zad. 1 Czy istnieje metryka d na zbiorze $\mathbb{R}$ taka, że $(\mathbb{R}, d)$ jest przestrzenią zwartą? (Wskazówka-hasło: indukowanie struktury).

Zad. 2 Kiedy przekształcenie liniowe $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest funkcją ciągłą? Kiedy jest homeomorfizmem?

Zad. 3 Pokaż, że jeżeli ciąg funkcji ciągłych jest zbieżny jednostajnie, to jest zbieżny do funkcji ciągłej.

Zad. 4 Pokaż, że $\mathbb{R}$ jest homeomorficzny z przestrzenią $\{f \in C[0,1]\colon f \text{ jest stała}\}$ z metryką supremum. Czy w $C[0,1]$ znajdziemy podprzestrzeń homeomorficzną z $\mathbb{R}^2$?

Zad. 5 Pokaż, że przestrzeń $\mathbb{Q}$ (z metryką euklidesową) nie jest metryzowalna w sposób zupełny. (Wskazówka: użyj tw. Baire'a).

Zad. 6 Mówimy, że zbiór $A \subseteq X$ jest typu G_δ, jeżeli jest przekrojem przeliczalnie wielu zbiorów otwartych. Pokaż, że każdy zbiór domknięty jest typu G_δ. Podaj przykład zbiorów typu G_δ na prostej, który nie jest ani otwarty ani domknięty. Podaj przykład zbioru, który nie jest typu G_δ.

Zad. 7 Czy zbiór funkcji różniczkowalnych (w każdym punkcie) ma wnętrze niepuste w $C[0,1]$ z metryką supremum? Czy jest domknięty?

Dla $x \in [0,1]$ i $L \in \mathbb{N}$ zdefiniujmy

$$C_x^L = \{f \in C[0,1]\colon \forall y \in [0,1]\ |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|\}.$$

Zad. 8 Pokaż, że dla każdego x i L zbiór C_x^L jest domknięty (w $C[0,1]$ z metryką supremum).

Zad. 9 Pokaż, że dla każdego x i L zbiór C_x^L ma puste wnętrze.

Zad. 10 Pokaż, że jeżeli $f \in C_x^L$, to istnieje $q \in \mathbb{Q}$ i $R \in \mathbb{N}$ taki, że $f \in C_q^R$.

Zad. 11 Pokaż, że jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x, to istnieje $L \in \mathbb{N}$ taki, że $f \in C_x^L$.

Zad. 12 Wywnioskuj z poprzednich zadań i z twierdzenia Baire'a, że istnieje funkcja ciągła, która nie jest różniczkowalna w żadnym punkcie.