Analiza i Topologia R **Lista 4** 9 XI 2018

Zad. 1 Pokaż, że jeżeli funkcja $f\colon X \to Y$ jest ciągła w sensie Cauchy'ego, to $f^{-1}[U]$ jest otwarty (w X) dla każdego zbioru otwartego U (w Y).

Zad. 2 Pokaż, że funkcja $f\colon X \to Y$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{-1}[K]$ jest zbiorem otwartym (w X) dla każdej kuli K (w Y).

Zad. 3 Pokaż, że funkcja $f\colon X \to Y$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{-1}[F]$ jest domknięty (w X) dla każdego zbioru domkniętego (w Y).

Zad. 4 Zauważ, że X jest przestrzenią spójną wtedy i tylko wtedy, gdy $X = U \cup V$ dla pewnych zbiorów otwartych, niepustych, rozłącznych.

Zad. 5 Udowodnij, że $[0,1]$ jest spójny. (Wskazówka: nie wprost załóż, że nie. Wtedy istnieją dwa zbiory otwarte rozłączne U, V takie, że $[0,1] = U \cup V$. Załóż, że $0 \in U$ i rozważ $a = \inf V$. Co się dzieje, gdy $a \in U$? Co gdy $a \in V$?)

Zad. 6 Podaj przykład funkcji ciągłej $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (w metryce euklidesowej) i zbioru otwartego $U \subseteq \mathbb{R}$ takiego, że jego obraz $f[U]$ nie jest otwarty.

Zad. 7 Załóżmy, że $f\colon X \to Y$ jest homeomorfizmem. Niech $A \subseteq X$. Pokaż, że $f_{|A}\colon A \to f[A]$ jest homeomorfizmem ($f_{|A}$ jest obcięciem funkcji f do A).

Zad. 8 Pokaż, że jeśli przestrzenie X i Y są homeomorficzne i X jest sumą n parami rozłącznych zbiorów otwartych, to przestrzeń Y również jest sumą n rozłącznych zbiorów otwartych.

Zad. 9 Niech X będzie podprzestrzenią $\mathbb{R}^2$ w kształcie litery „X", zaś Y podprzestrzenią $\mathbb{R}^2$ w kształcie litery „Y". Pokaż, że X nie jest homeomorficzne z Y. Wskazówka: nie wprost załóż, że taki homeomorfizm istnieje. Zastanów się, na co może przechodzić punkt leżący na przecięciu / i \w X. Wykorzystuj dwa poprzednie zadania.

Zad. 10 Podaj przykład przestrzeni niespójnej X i spójnej Y takiej, że istnieje funkcja ciągła $f\colon X \to Y$, która jest „na".

Zad. 11 Niech $h\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ będzie homeomorfizmem. Niech $A \subseteq X$. Sprawdź, czy

- $\overline{h(A)} = h(\overline{A})$,
- $\mathrm{Int}(h(A)) = h(\mathrm{Int}(A))$,

Zad. 12 Dokończ dowód, że zbiór Cantora jest homeomorficzny z przestrzenią $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ z metryką

$$d((x_n),(y_n)) = \frac{1}{2^k},$$

gdzie $k = \min\{n\colon x_n \neq y_n\}$ (lub $d((x_n),(y_n)) = 0$, jeśli $(x_n) = (y_n)$. (Na wykładzie zdefiniowaliśmy homeomorfizm, zgodziliśmy się, że jest on bijekcją i że jest ciągły w jedną stronę.)

Zad. 13 Pokaż, że $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ z metryką jak w poprzednim zadaniu jest homeomorficzna z $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ z metryką

$$d((x_n),(y_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}.$$

(Uwaga: ta druga metryka pojawiła się na liście nr 2).

Zad. 14 Niech C będzie zbiorem Cantora. Oczywiście $C \times C$ jest wtedy podzbiorem $\mathbb{R}^2$ i w takim razie można $C \times C$ rozpatrywać jako przestrzeń metryczną (z metryką euklidesową). Pokaż, że C jest homeomorficzne z $C \times C$. Wywnioskuj, że zbiór Cantora zawiera $\mathfrak{c}$ parami rozłącznych *kopii* zbioru Cantora.