
Analiza i Topologia R Lista 3 19 X 2018

Zad. 1 Niech A będzie zwartym podzbiorem \mathbb{R} . Pokaż, że A ma wtedy najmniejszy i największy element.

Zad. 2 Pokaż, że jeżeli X jest zwarta i $F \subseteq X$ jest domknięty, to F jest zwarty.

Zad. 3 Załóżmy, że X jest przestrzenią zwartą. Pokaż, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje skończony zbiór $F \subseteq X$ taki, że

$$\text{dla każdego } x \in X \text{ istnieje } f \in F \text{ taki, że } d(x, f) < \varepsilon.$$

(Wskazówka: załóż, że tak nie jest i skonstruuj przy tym założeniu ciąg bez podciągu zbieżnego.) Wywnioskuj, że każda przestrzeń zwarta jest ośrodkowa.

Zad. 4 Pokaż, że jeżeli ciąg Cauchy'ego ma podciąg zbieżny, to sam jest zbieżny (i to do tej samej granicy).

Zad. 5 Zbadaj, które z przestrzeni (\mathbb{R}^2, d) (gdzie d jest metryką miasto, rzeka, centrum i dyskretna) są zwarte, ośrodkowe i zupełne.

Zad. 6 Czy przestrzeń $C[0, 1]$ z metryką supremum jest zwarta?

Zad. 7 Rozważ przedział $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ z metryką daną wzorem

$$d(x, y) = |\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(y)|.$$

Czy ta przestrzeń jest zwarta? Zupełna? Ośrodkowa?