Analiza i Topologia R **Lista 2** 12 X 2018

Zad. 1 Pokaż, że metryka euklidesowa na $\mathbb{R}^2$ jest w istocie metryką. Zapisz wzorem metrykę centrum i metrykę rzeka. Wykaż, że rzeczywiście są to metryki.

Zad. 2 Sprawdź, że metryka supremum na $C[0,1]$ jest metryką. (Przypomnienie: przez $C[0,1]$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich funkcji ciągłych określonych na odcinku $[0,1]$ i o wartościach rzeczywistych. Metryka supremum dana jest wzorem

$$d_{sup}(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \colon x \in [0,1]\}.)$$

Zad. 3 Jak wyglądają kule na $\mathbb{R}^2$ z metryką rzeka? Z metryką centrum?

Zad. 4 Sprawdź, że funkcja $d\colon (\mathbb{R}^3)^2 \to [0,\infty)$ dana wzorem

$$d((x,y,z)\ ,\ (x',y',z')) = \max\{|x-x'|, |y-y'|, |z-z'|\}$$

jest metryką. Narysuj kulę o środku w punkcie $(0,0,0)$ i promieniu 3. Czy dostrzegasz podobieństwo tej metryki z metryką supremum?

Zad. 5 Rozważamy $C[0,1]$ z metryką supremum. Niech $f \in C[0,1]$ będzie dane wzorem $f(x) = \sin x$. Podaj przykład funkcji $g \in C[0,1]$ takiej, że $f \in B_2(g) \setminus B_1(g)$.

Zad. 6 Podaj przykład ciągu zbieżnego (najlepiej takiego, który nie jest od pewnego miejsca stały) i ciągu, który nie jest zbieżny, w przestrzeni $C[0,1]$ z metryką supremum.

Zad. 7 Pokaż, że ciąg (x_n) z $\mathbb{R}^2$ jest zbieżny w metryce euklidesowej wtedy i tylko wtedy, kiedy jest zbieżny w metryce miasto.

Zad. 8 Pokaz, że jeśli ciąg jest zbieżny w metryce rzeka, to jest zbieżny w metryce euklidesowej. Podaj przykład ciągu elementów $\mathbb{R}^2$, który jest zbieżny w metryce euklidesowej, ale nie w metryce rzeka.

Zad. 9 Jak wyglądają kule i zbiory otwarte w przestrzeni $[0,1) \cup [2,3]$ z metryką euklidesową? Jak wyglądają kule i zbiory otwarte w $\mathbb{N}$ z metryką euklidesową?

Zad. 10 Na zbiorze $[0,1]^{\mathbb{N}}$ (tutaj zakładamy, że $0 \notin \mathbb{N}$) określamy metrykę wzorem

$$d((x_n),(y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|x_n - y_n|.$$

Rozważmy kulę $B_{\frac{1}{2}}((a_n))$, gdzie (a_n) jest ciągiem stale równym 0. Podaj przykład elementu (x_n) tej kuli, który nie jest jej środkiem. Następnie znajdź dla tego elementu liczbę N taką, żeby prawdziwe było zdanie:

Jeśli (y_n) jest taki, że $\forall n < N\ y(n) = x(n)$, to $(y_n) \in B_{\frac{1}{2}}((a_n))$.

Zad. 11 Na wierzchołkach grafu (nieskierowanego, spójnego) można zdefiniować metrykę w następujący sposób: dwa wierzchołki są od siebie odległe o n, jeżeli da się z jednego do drugiego dojść przechodząc przez n krawędzi (ale już nie $n-1$). Sprawdź, że w istocie jest to metryka; zobacz, jak wyglądają w tej przestrzeni metrycznej kule, zbiory otwarte i zbiory domknięte.