Analiza i Topologia R **Lista ostatnia, przed-egzaminacyjna**

Zad. 1 Podaj przykład paru miar μ określonych na zbiorach borelowskich na $\mathbb{R}$ takich, że $\mu(\mathbb{R}) = 1$.

Zad. 2 Załóżmy, że μ i ν są miara określonymi na tej samej σ-algebrze i że $\nu \ll \mu$ oraz $\mu \ll \nu$. Znajdź związek między $\frac{d\mu}{d\nu}$ a $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Zad. 3 Rozważmy przestrzeń probabilityczną $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}, \mu)$ (*probabilistyczna* = miarowa + $\mu(\mathbb{R}) = 1$)

- Pokaż, że dystrybuanta F_μ miary μ jest prawostronnie ciągła.
- Pokaż, że dystrybuanta F_μ miary μ nie jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $x \in X$ taki, że $\mu(\{x\}) > 0$.
- Ile wynosi $\int_{\mathbb{R}} F_\mu d\mu$?

Zad. 4 Załóżmy, że $\mu \ll \nu$ i $\mu \perp \nu$. Co możemy powiedzieć o μ?

Zad. 5 Udowodnij, że $\nu \ll \mu$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi następujący warunek:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall E \in \Sigma \; (\mu(E) < \delta \implies \nu(E) < \varepsilon).$$

(Jedna z implikacji jest trywialna, druga trochę mniej.)

Zad. 6 Oblicz całki z zadania 5.5.16 skryptu *Miara i całka.*