Analiza i Topologia R   Lista 12   25 I 2019

Zad. 1 Rozważ funkcję $f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ taką, że

- $f(n,n)=1$ dla każdego n,
- $f(n+1,n)=-1$ dla każdego n,
- $f(k,n)=0$, jeżeli $k\neq n$ i $k\neq n+1$.

Jest to funkcja mierzalna względem $(\mathcal{P}(\mathbb{N})\otimes\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Sprawdź, że nie zachodzi dla niej teza twierdzenia Fubiniego (zastosowana dla $\mu\otimes\mu$, gdzie μ są miarami liczącymi na $\mathbb{N}$).

Zad. 2 Znajdź przykład funkcji $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, która jest borelowska, ale dla której nie zachodzi teza twierdzenia Fubiniego (zastosowana dla $\lambda\otimes\lambda$).

Zad. 3 Stosując tw. Fubiniego wyprowadź wzór na objętość stożka o wysokości h, którego podstawą jest zbiór borelowski $B\subseteq\mathbb{R}^2$.

Zad. 4 Rozważmy przestrzeń $(\{0,1\}^{\mathbb{N}},\Sigma,\mu)$, gdzie Σ i μ to σ-algebra i miara produktowa podane na wykładzie. Oblicz $\mu(A)$, jeśli

- A jest zbiorem tych ciągów $x\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, w których jedynka pojawiła się nieskończenie wiele razy,
- A jest zbiorem tych ciągów $x\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, w których sekwencja $(1,0,1,1)$ pojawia się przynajmniej raz,
- A jest zbiorem tych ciągów $x\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, w których sekwencja $(1,0,1,1)$ pojawia się dokładnie raz.

Zad. 5 Uzasadnij, że miara Lebesgue'a λ_2 na płaszczyźnie jest niezmiennicza na przesunięcia. Rozważ przekształcenie liniowe

$$T\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2.$$

Jak jest związek między $\lambda_2(A)$, a $\lambda_2(T[A])$? Wskazówka: rozważ najpierw proste przekształcenia liniowe i spróbuj wysnuć na podstawie tych rozważań jakąś hipotezę.

Zad. 6 Niech ν będzie miarą określoną na rodzinie zbiorów borelowskich zdefiniowaną przez

$$\nu(A)=\int_A x^2\,d\lambda,$$

gdzie λ jest miarą Lebesgue'a. Oblicz

$$\int_{[0,1]}\sin x\,d\nu.$$

Zad. 7 Dwie osoby losują liczby z przedziału $[0,1]$. Rozkład prawdopodobieństwa związany z losowaniem pierwszej osoby jest dany przez

$$\mu_1(A)=\int_A 3x^2\,d\lambda,$$

a drugiej przez

$$\mu_2(A) = \int_A 2 - 2x \; d\lambda.$$

(Tzn., że prawdopodobieństwo wylosowania przez i-tą osobę liczby ze zbioru A wynosi $\mu_i(A)$.) Jakie jest prawdopodobieństwo, że liczba wylosowana przez pierwszą osobę będzie dwa razy mniejsza niż przez drugą?