Analiza i Topologia R **Lista 11** 11 I 2019

Zad. 1 Pokaż, że jeżeli $f = g$ μ-prawie wszędzie, to

$$\int f \, d\mu = \int g \, d\mu.$$

Pokaż, że nie zachodzi odwrotna implikacja.

Zad. 2 Sprawdź, że funkcja μ określona na $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dana wzorem

$$\mu(A) = \frac{1}{3}\delta_1(A) + \frac{2}{3}\delta_2(A)$$

dla każdego $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, jest miarą. Oblicz całkę

$$\int_{\mathbb{R}} \sin x \, d\mu.$$

Podaj przykład takiej funkcji $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że

$$\int_{[0,1]} f \, d\mu = 15.$$

Zad. 3 Udowodnij tzw. nierówność Czebyszewa, tzn.

$$\int_X f \, d\mu \geq \epsilon \cdot \mu(\{x \in X \colon f(x) \geq \varepsilon\}).$$

Tutaj (X, Σ, μ) jest przestrzenią miarową, f jest funkcją mierzalną *nieujemną*, a $\varepsilon > 0$. (Mierzalność oznacza tutaj, że $f^{-1}[B] \in \Sigma$ dla każdego borelowskiego B; w rozwiązaniu można się obyć bez tej informacji, chodzi po prostu o to, żeby $\int f \, d\mu$ istniało).

Zad. 4 Rozważmy $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, gdzie μ jest miarą liczącą. Niech $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ będzie ciągiem. Pokaż, że

$$\int f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Zad. 5 Niech (X, Σ, μ_1), (Y, Π, μ_2) będą przestrzeniami miarowymi. Pokaż, że

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A \times B) = \mu_1(A) \cdot \mu_2(B)$$

dla każdego $A \in \Sigma$, $B \in \Pi$.

Zad. 6 Oblicz miarę $\lambda_2(A)$, gdzie

a) $A = [0,1] \times \{0,1\}$,

b) $A = \{\langle x, y\rangle \colon x - y \in \mathbb{Q}\}$.

Zad. 7 Rozważmy przestrzeń miarową $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{R}), \lambda \otimes \mu)$, gdzie μ jest miarą liczącą. Oblicz miarę $\lambda \otimes \mu(A)$, gdzie

a) $A = [0,1] \times \{0,1\}$,

b) $A = \{\langle n, m\rangle \in \mathbb{N}^2 \colon n \leq m\}$.

Zad. 8 Załóżmy, że dla zbiorów borelowskich A, $B \subseteq [0,1]^2$ zachodzi:

$$\forall x \ \lambda(A_x) = \lambda(B_x).$$

Wykaż, że w takim razie $\lambda_2(A) = \lambda_2(B)$. Pokaż, że ta równość byłaby spełniona również, gdy $\lambda(A_x) = \lambda(B_x)$ prawie wszędzie.

Zad. 9 Niech $E \in \mathrm{Bor}([0,1]^2)$. Rozważmy funkcję $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem $f_E(x) = \lambda(E_x)$.

a) Pokaż, że jeśli $E = A \times B$, to f_E jest borelowska,

b) Pokaż, że jeśli f_E jest borelowska i $F = [0,1]^2 \setminus E$, to f_F jest borelowska. (Wskazówka: jak zapisać f_F używając f_E?)

c) Pokaż, że jeśli f_{E_n} są borelowskie i $E = \bigcup E_n$, to f_E jest borelowska. (Wskazówka: jak zapisać f_E przy pomocy f_{E_n}?)

d) Wywnioskuj z powyższych, że f_E jest borelowska dla każdego borelowskiego $E \subseteq [0,1]^2$.