

**Zad. 1**    Załóżmy, że  $(f_n)$  jest ciągiem funkcji borelowskich takich, że istnieje  $r \in \mathbb{R}$  taki, że  $f_n(x) < r$  dla każdego  $n$  i dla każdego  $x$ . Pokaż, że wtedy  $f$  zdefiniowane jako

$$f(x) = \sup_n f_n(x)$$

jest funkcją borelowską. (Wskazówka: prześledź dowód faktu, że granica punktowa ciągu funkcji borelowskich jest borelowska.)

**Zad. 2**    Pokaż, że jeżeli funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest borelowska, a  $\lambda(A) = 0$ , to

$$\int_A f \, d\lambda = 0.$$

Pokaż to najpierw dla  $f$  będącej funkcją prostą, potem dla  $f$  - funkcji borelowskiej nieujemnej, a dopiero na końcu w pełnej ogólności.

**Zad. 3**    Oblicz całkę  $\int_{[1,3]} f \, d\lambda$ , gdzie  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

**Zad. 4**    Oblicz całkę  $\int_{[0,1]} g \, d\lambda$ , gdzie

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}, \\ \sin(x^2) & \text{dla } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

**Zad. 5**    Podaj parę przykładów funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , które są równie  $\lambda$ -prawie wszędzie funkcji  $g(x) = 2x + 1$ .

**Zad. 6**    Podaj parę przykładów funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , które są równie  $\delta_0$ -prawie wszędzie funkcji  $g(x) = 2x + 1$ . (Tutaj  $\delta_0$  jest deltą Diraca w punkcie 0). Podaj charakteryzację takich funkcji.

**Zad. 7**    Zastanów się, jakie znaczenie ma poniższa całka (tzn. co w ogólności oznacza  $\int f \, d\mu$ , gdy  $\mu$  jest niekoniecznie miarą Lebesgue'a), a następnie oblicz ją

$$\int_{[0,1]} 2x + 1 \, d\delta_0.$$