Analiza i Topologia R Lista 1 3 X 2018

Zad. 1 Wykonaj poniższe polecania posługując się ściśle definicjami kresów.

a) zauważ, że jeżeli zbiór A ma największy element, to jest on jego kresem górnym,

b) sprawdź, czy największy element zbioru A może być jego kresem dolnym,

c) oblicz kresy zbiorów $(0,1)$, $[0,1]$,

d) oblicz kresy zbiorów $\{1/n\colon n \in \mathbb{N}\}$, $\{k/n\colon k,n \in \mathbb{N}\}$, $\{k/n\colon n \in \mathbb{N},\ 0 < k < n\}$,

e) oblicz $\sup\{\sin(x)\colon x \in [0,1)\}$.

Zad. 2 Pokaż, że

$$\sup\{f(x)+g(x)\colon x \in A\} \leq \sup\{f(x)\colon x \in A\} + \sup\{g(x)\colon x \in A\}$$

dla każdego niepustego $A \subseteq \mathbb{R}$ i dowolnych funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Zad. 3 Jaka jest relacja między $\lim a_n$ a $\sup\{a_n\colon n \in \mathbb{N}\}$, jeśli (a_n) jest zbieżny i rosnący? A jeśli jest tylko zbieżny?

Zad. 4 Niech (A_n) będzie ciągiem podzbiorów $\mathbb{R}$. Wykaż, że

$$\bigcap_n \bigcup_{k>n} A_k = \{x \in \mathbb{R}\colon x \in A_n \text{ dla nieskończenie wielu } n\}.$$

Czy potrafisz znaleźć podobną charakteryzację zbioru

$$\bigcup_n \bigcap_{k>n} A_k?$$

Zad. 5 Znajdź ciąg (A_n) podzbiorów $\mathbb{R}$, dla którego

$$\bigcap_n \bigcup_{k>n} A_k \neq \bigcup_n \bigcap_{k>n} A_k.$$

Zad. 6 Pokaż, że suma dowolnie wielu zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym (w razie trudności, na początku spróbuj dowieść, że suma dwóch zbiorów otwartych jest otwarta).

Zad. 7 Pokaż, że jeżeli zbiory U_1, $U_2 \subseteq X$ są otwarte, to $U_1 \cap U_2$ jest otwarty. Wywnioskuj, że przekrój skończenie wielu zbiorów otwartych jest otwarty. Pokaż, że przekrój nieskończenie wielu zbiorów otwartych nie musi być otwarty.

Uwaga. W poniższych zadaniach domyślną metryką na $\mathbb{R}^k$ jest metryka euklidesowa.

Zad. 8 Zdefiniuj podzbiór $\mathbb{R}^5$, który nie jest ani otwarty ani domknięty.

Zad. 9 Pokaż, że dla każdego zbioru $A \subseteq X$ zachodzi

$$\overline{A} = (\mathrm{Int}(A^c))^c.$$

Zad. 10 Znajdź wnętrza, domknięcia i brzegi poniższych podzbiorów płaszczyzny:

$$\emptyset,\quad \mathbb{Q}\times\mathbb{Q},\quad \{\langle x,y\rangle\colon x<y\},\quad [0,1]\times(0,1),\quad \{\langle x,y\rangle\colon \sqrt{x^2+y^2}<9\}\cup\{\langle 3,0\rangle,\langle 0,3\rangle\},\quad \mathbb{N}\times\mathbb{Q}$$

Które z nich są otwarte, które domknięte, które gęste, a które brzegowe? Jak będą wyglądać wnętrza i domknięcia tych zbiorów w metryce miasto, rzeka i dyskretnej?

Zad. 11 Wykaż, że podzbiory $\mathbb{R}^n$ postaci $(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_n,b_n)$ są otwarte, a $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ są domknięte.

Zad. 12 Pokaż, że ciąg (x_n) w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^k$ jest zbieżny, jeśli każdy z ciągów $x_n(i)$ dla $i<k$ jest zbieżny.