Kolokwium 2 - Analiza i Topologia R

Zad. 1 Niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią miarową. Załóżmy, że $f\colon X \to Y$ jest funkcją. Pokaż, że

- $\mathcal{A} = \{B\colon f^{-1}[B] \in \Sigma\}$ jest σ-algebrą podzbiorów Y,
- funkcja $\nu(B) = \mu(f^{-1}[B])$ jest miarą określoną na $\mathcal{A}$.

Wywnioskuj, że $(Y, \mathcal{A}, \nu)$ jest przestrzenią miarową. Czym będzie $\mathcal{A}$ i ν, jeśli $Y = \mathbb{R}$, a f jest funkcją stale przyjmującą wartość 3?

Zad. 2 Rozważmy przestrzenie miarowe $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}), \delta_3)$, gdzie δ_3 jest deltą Diraca w punkcie 3 oraz $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}), \mu)$, gdzie μ jest miarą liczącą. Opisz rodzinę

$$\{E \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{Bor}(\mathbb{R})\colon \delta_3 \otimes \mu(E) = 5\}.$$

Zad. 3 Sformułuj swoje ulubione twierdzenie należące do zbioru {twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej, lemat Fatou, twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej}.

Zad. 4 Niech $f(x) = x$. Podaj przykład funkcji prostej $p\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ takiej, że $p(x) \leq f(x)$ dla każdego $x \in [0,1]$ i

$$\int_{[0,1]} p \, d\lambda > 1/4.$$

Zad. 5 Wyjaśnij, dlaczego przedziały postaci $[a,b)$, gdzie $a,b \in \mathbb{R}$, generują rodzinę zbiorów borelowskich.

Zad. 6 Podaj przykład ciągu (f_n) funkcji ciągłych określonych na $[0, 1]$, który jest zbieżny w normie całkowej, a nie jest zbieżny w normie supremum.

Zad. 7 Udowodnij, że przestrzeń $C[0, 1]$ nie jest przestrzenią Hilberta.

Zad. 8 Podaj przykład niezerowego wektora w ℓ_2, który jest prostopadły do wektora $(1, 0, 1/2, 0, 1/3, 0, 1/4, 0, \dots)$ (wraz z uzasadnieniem).

Zad. 9 Rozważmy funkcję F określoną na zbiorze funkcji borelowskich wzorem:

$$F(f) = \int |f| \, d\lambda.$$

Które warunki normy spełnia ta funkcja?