Kolokwium 1 - Analiza i Topologia R

Zad. 1 Zbadaj wnętrze i domknięcie zbioru A w przestrzeni X, jeśli

a) $X = \mathbb{R}^2$ (z metryką euklidesową), $A = \{\langle \frac{1}{n}, x \rangle \colon n \in \mathbb{N}, x \in [0,1)\}$;

b) $X = \mathbb{R}^2$ (z metryką miasto), $A = \{\langle x, y \rangle \colon x < y\}$;

c) $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (z tradycyjną metryką), A - ciągi, których pierwszy wyraz jest równy 0;

d) $X = C[0,1]$ (z metryką supremum), $A = \{f \colon f(0) = 1\}$;

e) $X = \mathbb{R}$ (z metryką dyskretną), $A = [0,1)$.

Zad. 2 Sformułuj twierdzenie Baire'a.

Zad. 3 Pokaż, że każda przestrzeń metryczna zwarta jest przestrzenią zupełną. Podaj przykład przestrzeni, która jest zupełna, ale nie jest zwarta (wraz z uzasadnieniami zupełności i braku zwartości).

Zad. 4 Wskaż funkcję ciągłą $f\colon X \to Y$, która jest „na“ lub uzasadnij, że taka nie istnieje, gdy

a) $X = [0, 1)$, Y - okrąg o promieniu 1 (na obydwu przestrzeniach rozważamy metrykę euklidesową).

b) $X = \mathbb{R}^2$, Y - zbiór Cantora (na obydwu przestrzeniach rozważamy metrykę euklidesową).

c) $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (z tradycyjną metryką), $Y = [0, 1) \times (0, 1]$ (z metryką euklidesową).

d) $X = C[0, 1]$ (z metryką supremum), $Y = \mathbb{R}$ (z metryką euklidesową).

Zad. 5 Niech (X, d) będzie przestrzenią zwartą ośrodkową taką, że $d(x, y) \leq 1$ dla każdych $x, y \in X$. Niech $D = \{x_1, x_2, \dots\}$ będzie zbiorem przeliczalnym, gęstym w X. Pokaż, że funkcja $f\colon X \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ dana wzorem

$$f(x) = (d(x, x_1), d(x, x_2), d(x, x_3), \dots)$$

jest różnowartościowa i ciągła. (Przypomnienie: na $[0,1]^{\mathbb{N}}$ rozważamy metrykę ρ daną wzorem

$$\rho(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{|x(i) - y(i)|}{2^i}.)$$

Wywnioskuj z powyższego następujące twierdzenie: każda przestrzeń zwarta ośrodkowa jest homeomorficzna z pewną podprzestrzenią $[0,1]^{\mathbb{N}}$.