

**Zad. 1** (6) Podaj przykłady (o ile istnieją) wraz z krótkim uzasadnieniem:

a) Ciągu zbieżnego, który nie jest ciągiem Cauchy'ego.

b) Przestrzeni zupełnej, która nie jest zwarta.

c) Przestrzeni nieośrodkowej, która nie jest spójna.

d) Funkcji ciągłej  $f$  takiej, że  $f[A]$  nie jest otwarty, dla pewnego zbioru otwartego  $A$ .

**Zad. 2** (7) Niech  $d_e$  będzie metryką euklidesową na  $\mathbb{R}^2$ . Rozważmy funkcję daną wzorem

$$d(x, y) = \begin{cases} d_e(x, y), & \text{jeśli } d_e(x, y) \leq 1, \\ 1, & \text{jeśli } d_e(x, y) > 1. \end{cases}$$

- Sprawdź, że  $d$  jest metryką.
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- Naszkicuj w układzie współrzędnych kulę o środku w punkcie  $\langle 0, 0 \rangle$  i promieniu 4 (w sensie metryki  $d$ ).
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- Pokaż, że ciąg  $(x_n)$  w  $\mathbb{R}^2$  jest zbieżny w metryce euklidesowej wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny w metryce  $d$ .
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- Czy  $(\mathbb{R}^2, d)$  i  $(\mathbb{R}^2, d_e)$  są homeomorficzne?

**Zad. 3** (2) Podaj przykład zbioru  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  (z metryką euklidesową) takiego, że

$$\text{Int}(\overline{A}) \neq \text{Int}(A)$$

lub wykaż, że taki nie istnieje.

**Zad. 4** (4) Wykaż, że zbiór  $[0, 1] \times \{1\}$  nie jest zwarty na płaszczyźnie z metryką rzeka.

**Zad. 5** (3) Niech  $C$  będzie zbiorem Cantora. Pokaż, że nie istnieje funkcja ciągła

$$f: [0, 1] \rightarrow C.$$

.

**Zad. 6** (3) Podaj przykład zbioru  $A \subseteq \mathbb{R}$  takiego, że zbiór  $[0, 1)$  jest w przestrzeni  $(A, d_{\text{eukl}})$  otwarty, ale nie jest domknięty.