

---

## Egzamin 1 - Analiza i Topologia R

---

**Zad. 1** Pokaż, że każda zwarta przestrzeń metryczna jest zupełna.

**Zad. 2** Rozważmy kulę **domkniętą**  $B$  o promieniu 1 i środku w wektorze zerowym w przestrzeni  $\ell_\infty$  (znaną także w niektórych kręgach jako  $\ell_{\text{infinito}}$ , czyli przestrzeń wszystkich ciągów ograniczonych z normą supremum  $\|\cdot\|_\infty$ ), czyli

$$B = \{x \in \ell_\infty : \|x\|_\infty \leq 1\}.$$

Pokaż, że  $B$  nie jest zwarta. (Oczywista wskazówka: co świadczy o tym, że przestrzeń nie jest zwarta?).

**Zad. 3** Podaj przykład przestrzeni Banacha, która nie jest przestrzenią Hilberta.

**Zad. 4** Podaj przykład przestrzeni Hilberta, która nie jest przestrzenią euklidesową (wraz z definicją odpowiedniej metryki).

**Zad. 5** Czy istnieje liczba niewymierna, która należy do (klasycznego) zbioru Cantora? Odpowiedź krótko uzasadnij.

**Zad. 6** Czy zbiór funkcji różniczkowalnych jest gęsty w  $C[0, 1]$  (z normą supremum)? Odpowiedź krótko uzasadnij.

**Zad. 7** Czy istnieje zbiór  $A \subseteq \mathbb{R}$ , który jest domknięty, ma puste wnętrze i dodatnią miarę Lebesgue'a? Odpowiedź krótko uzasadnij.

**Zad. 8** Podaj przykład ciągu funkcji ciągłych zbieżnego w normie całkowitej, który nie jest zbieżny punktowo. (Nie trzeba określać tych funkcji wzorem.)

**Zad. 9** Dwie osoby losują liczby z przedziału  $[0, 1]$ . Rozkład prawdopodobieństwa związany z losowaniem pierwszej osoby jest dany przez

$$\mu_1(A) = \int_A 48\left(x - \frac{1}{2}\right)(1-x)\chi_{[\frac{1}{2}, 1]} d\lambda,$$

a drugiej przez

$$\mu_2(A) = \int_A 6x(x-1) d\lambda.$$

(Tzn., że prawdopodobieństwo wylosowania przez  $i$ -tą osobę liczby ze zbioru  $A$  wynosi  $\mu_i(A)$ .)

Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowane przez nich liczby będą bliżej siebie niż  $1/2$ ? (Uwaga. Ważne przede wszystkim, żeby napisać **co** trzeba policzyć).

**Zad. 10** Wykaż, że poniższa funkcja  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest borelowska.

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \in \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{x}, & \text{gdy } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

**Zad. 11** Losujemy liczbę rzeczywistą zgodnie z rozkładem

$$\mu(A) = \int_A \frac{1}{2} \chi_{[1,3]} d\lambda.$$

Naszkicuj wykres dystrybuanty  $F_\mu$ .