

www.wolframalpha.com www.wolframalpha.com www.wolframalpha.com www.wolframalpha.com – Polecam!

www.math.uni.wroc.pl/~msliw/1a www.math.uni.wroc.pl/~msliw/1a www.math.uni.wroc.pl/~msliw/1a

K. Makuszyński (*Bezgrzeszne lata*): „Znałem tylko dwóch takich potworów, a jednym z nich był mądry bardzo ksiądz, który nas nauczał rzeczy najmniej potrzebnej na świecie: logiki!” ☺

Z1. Jaką wartość logiczną ma zdanie $\sim(p \wedge \sim(\sim q \oplus p)) \vee ((\sim p \vee (q \oplus p)) \oplus \sim q)$, jeśli p to zdanie prawdziwe, a q – fałszywe?

Z2. Zapisz symbolicznie koniunkcję alternatywy zdań α i β oraz negacji ich koniunkcji.

Z3. Udowodnij, że $\neg p \vee q$ to nie to samo co $\neg(p \vee q)$.

Z4. * Spróbuj arytmetycznie opisać działanie alternatywy wykluczającej na zerach i jedynkach, na początek dla dwóch zdań składowych, ale może uda Ci się nawet dla dowolnie wielu?

Z5. No a teraz bez wahania oznaczmy sobie zdania:

$p_1 \equiv$ Pani prof. Buraczewska jest z wykształcenia japonistką.

$p_2 \equiv$ Słowo „komputer” pochodzi od słowa oznaczającego liczenie.

$p_3 \equiv$ Zimy na Suwalszczyźnie są mroźne.

$p_4 \equiv$ Na wrocławskich uczelniach w roku 2020/21 uczyło się około 110 tys. studentów.

$p_5 \equiv$ Uczniowie Ia kochają matematykę.

$p_6 \equiv$ Prof. Śliwiński jest przedstawicielem *Homo sapiens sapiens*.

$p_7 \equiv$ „Przygody Alicji w Krainie Czarów” napisał angielski matematyk.

$p_8 \equiv$ W polskiej wersji Wikipedii jest ponad $1,5 \cdot 10^6$ artykułów.

$p_9 \equiv$ Trzech polskich matematyków przyczyniło się do wcześniejszego zakończenia II wojny światowej.

Zanim dzwonek załomoce, wartość zdań poniższych oceń:

$$q_1: p_1 \vee \neg p_2$$

$$q_6: \neg(p_2 \wedge \neg(p_3 \wedge p_1))$$

$$q_2: p_1 \vee \neg p_3 \vee p_1 \vee p_5$$

$$q_7: (p_2 \wedge p_3 \wedge \neg p_4 \wedge p_5) \vee (\neg p_1 \wedge p_3 \wedge p_5) \vee [(p_2 \vee p_4) \wedge (\neg p_3 \wedge p_5)]$$

$$q_3: p_2 \vee p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_2$$

$$q_8: (p_1 \vee p_6 \vee \neg p_5) \vee (p_2 \vee \neg p_3) \vee p_5$$

$$q_4: p_2 \wedge p_3 \wedge \neg p_4 \wedge \neg p_2$$

$$q_9: (p_1 \wedge \neg p_4) \underline{\vee} (p_1 \wedge p_4) \text{sad}$$

$$q_5: p_2 \wedge (\neg p_4 \underline{\vee} p_6)$$

$$q_0: (p_1 \wedge \neg p_4) \underline{\vee} (\neg p_1 \vee p_4)$$

I zagadka, Dzieci Drogie: które z nich to tautologie? Jest też całkiem możliwe znaleźć tu zdanie *zawsze fałszywe*! (A nim do kolejnych zadań przejdziemy, wspomnijmy, że je kontrtautologiami zwiemy!)

Z6. Zadanie całkiem tu nowe – formuły są już gotowe i chodzi o koncentrację, byś podał te waluacje, przy których – czyż to nie ckiwie? – zdania otrzymasz prawdziwe.

$$f_1: p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4$$

$$f_3: p_1 \underline{\vee} (p_2 \vee p_1)$$

$$f_5: p_1 \vee (p_2 \wedge \neg p_1)$$

$$f_2: p_1 \wedge (p_2 \vee p_3 \vee p_4)$$

$$f_4: p_1 \wedge (p_2 \wedge \neg p_1) \wedge \neg(\neg p_2 \vee p_1)$$

$$f_6: p_1 \rightarrow (p_1 \vee p_2)$$

Z7. A oto i dalsze zdania do prawdziwości stwierdzania (a p indeksowane powyżej zdefiniowane):

$$r_1: p_2 \rightarrow (p_3 \underline{\vee} p_4)$$

$$r_3: (p_3 \underline{\vee} p_4) \rightarrow (p_3 \vee p_4)$$

$$r_5: (p_1 \vee p_4) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_4)$$

$$r_2: (p_2 \wedge \neg p_4) \rightarrow [(p_1 \underline{\vee} p_5) \vee p_6]$$

$$r_4: (p_5 \wedge p_6) \rightarrow p_5$$

$$r_6: (p_2 \rightarrow p_3) \rightarrow (p_3 \rightarrow p_2)$$

I do tych zdań, Koleżanko, Kolego, zastosuj pytania z zad. poprzedniego!

Z8. Nigdy nie nadużywaj negocjowania! – bo spróbuj szybko zrozumieć te zdania...

a) *Albany utracą dekret o zniesieniu ustawy przeciwko kontroli urodzin* (tytuł w „New York Times”, 6.05.1965)

b) *Muszę Wam wyjaśnić, że tylko żartowałem, pisząc, że nie uważam za nieodwołalne swojego postanowienia o powtórny przeomyśleniu mojej decyzji, aby nie zmieniać o Was zdania. Naprawdę tak myślę!*

(na podst. „Opowieści matematycznych” M. Szurka)

Czy: a) w Albany po wspomnianym utraceniu obowiązuje kontrola urodzin?

b) po wspomnianym wyjaśnieniu mam o Was takie samo zdanie jak na początku?

Czy logika matematyczna pomaga we w miarę bezbolesnym udzieleniu odpowiedzi na te pytania?

(Podp.: pomyśl o zdaniach postaci $\sim \sim \sim \dots \sim p$).

Więcej ciekawostek dot. konfrontacji homo sapiens z logiką na www.math.uni.wroc.pl/~msliw/logiczne.html.

Z9. (Wykorzystanie arytmetyki w dziełach kultury masowej, dedykuję prof. Mizi)

Czy prawdziwa jest koniunkcja zdań występujących w przedziale [4:01; 4:04] filmiku

<https://www.youtube.com/watch?v=m1M5Tc7eLCo&list=RDMM&index=27>? A lternatywa? A wykluczająca?

Z10. (English works :)) Try to read this: $(2b) \vee \neg(2b)$.



Hint: _____ + 2,718...

Czy jeśli $2b$ uznać za (dość dziwne) oznaczenie zmiennej zdaniowej, powyższe słynne zdanie stanie się tautologią?

Z11. Co można powiedzieć o A i B , jeśli:

a) $A \cap B = A$

b) $A \cup B = A$

c) $A \cup B = \emptyset$

d) $A \cap B = \emptyset$

e) $A \setminus B = A$

f) $A \setminus B = B$

g) $A \setminus B = A \cup B$

h) $A \setminus B = A \cap B$

i) $A \cup B = A \cap B$

j) $A \cup B \subseteq A$

k) $A \cap B \subseteq A$

l) $A \setminus B \subseteq A$

m) $A \setminus B \subseteq B$

Co by zmieniło, gdybyśmy zmienili „ $\subseteq$ ” na inkluzję właściwą?

Z12. Na odpowiednim (z właściwą liczbą zbiorów) diagramie Venna zaznacz: $\mathcal{L} = \{p: p \notin X \Rightarrow p \in Y\}$

$A = X' \cup Y$, $B = X \cap Y \cap Z$, $C = X \cap (Y \cup Z)$, $D = X' \cap Y \cap Z$, $E = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$, $F = \{p: p \notin X \wedge p \in Y \wedge p \in Z\}$,

$G = \{p \notin X: p \in X \cup Y\}$, $H = \{p: p \in X \Rightarrow p \in Y\}$, $I = X' \cap Y'$, $J = (X \cup Y)'$, $K = X \Delta Y \Delta Z$, $L = X \Delta (Y \Delta Z)$.

Z13. Znaszli ten zbiór? $\left(\left\{ x: x^3 - 77x^2 + \frac{24}{\sqrt{x}} < \pi + 4 \right\} \cup (-1000, 234] \right) \cap \left(\left\{ x: x^3 - 77x^2 + \frac{24}{\sqrt{x}} \geq \pi + 4 \right\} \cup (-1000, 234] \right)$

Z14. „Odpowiednie dać rzeczy – słowo” – opisz zbiory te bardziej skrótowo.

Problem chyba jest to mały – czasem są to wszak przedziały,

czasem elementów mało – podać by je należało,

czasem też zbiór całkiem znany, tylko zakamuflowany!

$A = \{x \in \mathbf{N}: |x| > 0\}$

$A = \{x \in \mathbf{Z}: 18|x\}$

$B = \{x \in \mathbf{R}: x - 3 < 5\}$

$C = \{x \in \mathbf{Q}: x^2 \in \mathbf{Z}\}$

$\acute{C} = \{x \in \mathbf{N}: 5|x \wedge 10|x\}$

$D = \{x \in \mathbf{Z}: 4|x \wedge 6|x\}$

$\acute{E} = \{x \in \mathbf{Z}: x \in (-5, 0]\}$

$E = \{x \in (-4, 2): x^2 \geq 5\}$

$F = \{x \in \mathbf{R}: x^2 \notin (-7, 3)\}$

$G = \{x \in \mathbf{R}: x < 0 \wedge x \geq -1\}$

$H = \{x \in \mathbf{R}: x > 0 \wedge x < -1\}$

$I = \{x \in \mathbf{R}: x < 3 \vee x \geq -2\}$

$J = \{x \in \mathbf{R}: x > 3 \vee x \leq -2\}$

$K = \{x \in \mathbf{Z}: x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}\}$

$L = \{x \in \mathbf{Z}: x \notin \mathbf{N}\}$

$\acute{L} = \mathbf{R} \cap (\mathbf{Z} \setminus \mathbf{Q})$

$M = (\mathbf{Q} \cap \mathbf{Z}) \setminus \mathbf{N}$

$N = ((-\infty, 3) \cup (5, 7)) \setminus (3, 6)$

$\acute{N} = (\mathbf{R}_+ \cup (-15, -13) \cup \{-3, -2, -1, \dots, 9, 10\}) \cap \mathbf{N}$ $\acute{O} = ((-17, -15) \cup \{-3, -2, -1, \dots, 7, 8\} \cup \mathbf{R}_+) \cap \mathbf{Z}$

Z15. Zapisz $\{x: x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C)\}$, używając tylko działań na zbiorach, liter A, B, C i w razie potrzeby nawiasów.

Z16. Udowodnij łączność różnicy sym., najlepiej na kilka sposobów!

Z17. Zapisz jak najprościej zbiór: $X = A \cdot B \cdot A$, $Y = (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{R} \cdot (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{R} \cdot \dots \cdot \mathbf{R} \cdot (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$, gdzie trójkądków jest 2022.

Z18. Rozwiąż równanie na zbiorach (czyli znajdź wszystkie zbiory X , dla których jest spełnione):

a) $\{1, 2, 3\} \cup X = \{1, 2, 3, 4\}$, b) $\{1, 2, 3, 4\} \cap X = \{2, 4\}$, c) $X \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 4, 8\}$, d) $X \cdot \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 3, 5\}$,

x) $X \cap A = A$, y) $X \cdot A = A$, z) $A \cdot A = X$, α) $X \cup A = B$, β) $X \cap A = B$, γ) $X \cdot A = B$, δ) $A \cdot (X \cdot B) = C$.

Z19. Przeczytaj (ze zrozumieniem) artykuły www.matematyka.wroc.pl/ciekawieomatematyce/roznicasymetryczna i <http://www.matematyka.wroc.pl/ciekawieomatematyce/cozaroznica>.

Z20. Sprawdź, czy iloczyn zbiorów jest rozdzielny względem sumy. (W tym celu porównaj zbiory $(A \cup B) \cap C$ i $A \cap (B \cap C)$).

Z21. Sprawdź, czy suma zbiorów jest rozdzielna względem iloczynu. (W tym celu porównaj zbiory...)

Z22. I na pomyślniejszą pora – czy zachodzi łączność xora?

Z22'. Czy jest rozdzielność koniunkcji? (A pytam względem alternatywy).

Użyj mózgowych swych funkcji! A odwrotny schemat jest prawdziwy?

Z22". Żeby było całkiem klawo, spróbuj też zapisać prawo rozdzielności względem alternatywy wykluczającej alternatywy.

Drugi wers jak najściślej rymuję, lecz czy prawo takie obowiązuje??!

Z23. Kolejna świetna zabawa – logiczne odnajdź tu prawa!

$$\alpha: [(p \rightarrow q) \rightarrow r] \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$$

$$\chi: (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

$$\pi: [(p \rightarrow q) \wedge \neg p] \rightarrow \neg q$$

$$\beta: [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow [p \rightarrow r]$$

$$\delta: [(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$$

$$\rho: [p \wedge \neg (q \rightarrow (r \vee \neg p))] \rightarrow (q \rightarrow r)$$

I jeszcze drobna taka subtelnosc: czy w którymś z zewnętrznych wnioskowań można odwrócić kolejność?

Z24. Stwórz tabelkę prawdy dla równoważności. Z czym Ci się kojarzy? Czy umiesz zdefiniować równoważność przy pomocy wcześniej poznanych spójników?

Z25. Zgadnij, jakie słowo się tu rozsypało: F I K A A N T Y K W T O R Y
Lecz i dalsze są zadania:

Z26. Które tu prawdziwe zdania?

$$\alpha) \forall x \in \mathbf{Q}_- \quad x^2 > 0$$

$$\varepsilon) \exists x \in \mathbf{N} \quad \exists y \in \mathbf{N} \quad xy = 29$$

$$\iota) \exists x \in \mathbf{Q} \quad \forall a, b \in \mathbf{Z}_- \quad x > ab$$

$$\beta) \exists x < 5 \quad x < -1$$

$$\zeta) \forall x, y \in \mathbf{R} \quad (x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbf{Q} \quad x < z < y)$$

$$\kappa) \forall a, b \in \mathbf{Z}_+ \quad \exists c \in \mathbf{N}_+ \quad c \leq ab$$

$$\gamma) \exists x < -1 \quad x < 5$$

$$\eta) \exists x, y \in \mathbf{N} \quad \forall z \in \mathbf{R} \quad x + z = yz$$

$$\lambda) \exists a \in \mathbf{Z} \quad \forall k, l \in \mathbf{N} \quad a < kl$$

$$\delta) \forall x \in \mathbf{Q}_- \quad \forall y \in \mathbf{N} \quad x/y \in \mathbf{Q}$$

$$\theta) \forall x \in \mathbf{Z}_- \quad \exists y, z \in \mathbf{N} \quad x + y = z$$

$$\mu) \forall x \in \mathbf{Q}_- \quad \exists a, b \in \mathbf{Z} \setminus \{0\} \quad x = a/b$$

Z27. Kwantyfikatorów z reguły przestawiać nie można, czynność więc ta zawsze niezwykle być musi ostrożna! W których tu przykładach po takiej zamianie tej samej prawdziwości otrzyma się zdanie?

$$\nu) \forall x \in \mathbf{N} \quad \exists y \in \mathbf{R} \quad -y < x$$

$$\xi) \forall x \in \mathbf{N} \quad \exists y \in \mathbf{Z}_+ \quad xy \geq 0$$

$$\omicron) \forall x \in \mathbf{N} \quad \exists y \in \mathbf{R}_+ \quad xy < 1$$

$$\pi) \forall x \in \mathbf{Z} \quad \exists y \in \mathbf{N} \quad |x| < y$$

$$\rho) \forall x \in \mathbf{N} \quad \exists y \in \mathbf{Z} \quad x = -y$$

$$\sigma) \forall x \in \mathbf{R} \quad \exists y \in \mathbf{R} \quad xy = 0$$

Z28. A teraz zwróć się jeszcze ku Drogiej Klasie – gdzie w zdaniach wyżej wykrzyknik dostawić da się? Proces myślowy będzie pewnie wartki, ale rozpatrz zdania od początku kartki!

Z29. Uzupełnij zapisy, wpisując się w schemat:

$$\{..., -3/2, -1, -1/2, 0, 1/2, ...\} = \underline{\hspace{2cm}} = \{k/2: k \in \mathbf{Z}\}$$

$$\{5, 6, 7, ...\} = \{a: \exists k \in \mathbf{N} \quad a = k + 5\} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\underline{\hspace{2cm}} = \{a: \exists k \in \mathbf{Z}_- \quad a = 6k\} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Z30. Mimo późnej może pory zapisz, proszę, prościej zbiory:

$$E = \{x \in \mathbf{N}: \neg \exists y \in \mathbf{N} \quad (y|x \wedge y > x)\}$$

$$A = \{x \in \mathbf{Q}: \forall y \in \mathbf{N} \quad y > x\}$$

$$F = \{x \in \mathbf{Z}: \exists! y \in \mathbf{N} \quad y|x\}$$

$$B = \{x \in \mathbf{R}: \exists y \in \mathbf{Q} \quad xy \notin \mathbf{Q}\}$$

$$G = \{x \in \mathbf{R}: \exists y \in \mathbf{Z} \quad x = 5y\}$$

$$C = \{x \in \mathbf{N}: \forall y \in \mathbf{Z}_+ \quad x/y \in \mathbf{Q}\}$$

$$H = \{x \in \mathbf{Q}: \forall y \notin \mathbf{Q} \quad xy \notin \mathbf{Q}\}$$

$$D = \{x \in \mathbf{Z}: \exists y \in \mathbf{R} \quad xy = 1\}$$

$$\acute{S} = \{x \in \mathbf{Z}: \exists! y \in \mathbf{N} \quad x > y\}$$

Z31. q i p formy to zdaniowe,
zadanie czai się więc nowe
(formy z jedną tylko zmienną),
nie czai się lecz nadaremno:
jeśli zasłużyć chcesz na kolację
- ustal, prawdziwe gdzie implikacje!

0. $\forall x p(x) \rightarrow \exists x p(x)$
1. $\forall x [p(x) \vee q(x)] \rightarrow \forall x p(x)$
2. $\exists x [p(x) \rightarrow q(x)] \rightarrow \exists x q(x)$
3. $\forall x \neg p(x) \rightarrow \neg \exists x p(x)$
4. $\exists x \neg p(x) \rightarrow \neg \forall x p(x)$
5. $[\forall x (p(x) \rightarrow q(x)) \wedge \exists x p(x)] \rightarrow \exists x q(x)$

Z32. A teraz takie cztery zdania ustaw, proszę, w kolejności wynikania: $\forall x \exists y \varphi(x,y)$ $\exists x \forall y \varphi(x,y)$
(φ – to już pewna norma – zdaniowa jakaś forma). $\forall x \forall y \varphi(x,y)$ $\exists x \exists y \varphi(x,y)$

Z33. A teraz takie cztery zdania ustaw, proszę, w kolejności wynikania: $\forall x \exists y \varphi(x,y)$ $\exists y \forall x \varphi(x,y)$
(φ – to już pewna norma – zdaniowa jakaś forma). $\forall x \forall y \varphi(x,y)$ $\exists x \exists y \varphi(x,y)$

Z34. Chyba nie będę zanadto bezczelny, jeśli zapytam z uśmiechem właściwym,
kwantyfikator (i który) rozdzielnym względem koniunkcji lub alternatywy?

Z35. I takie do rozwiązania – fałszywe które są zdania? *Jest tu 0 zdań fałszywych.* *Jest tu 5 zdań fałszywych.*
Jest tu 7 zdań fałszywych. *Są tu 3 zdania fałszywe.* *Jest tu 6 zdań fałszywych.*
Są tu 2 zdania fałszywe. *Są tu 4 zdania fałszywe.* *Jest tu 1 zdanie fałszywe.*
Jest tu 8 zdań fałszywych. *Jest tu 9 zdań fałszywych.* *Jest tu 10 zdań fałszywych.* *Jest tu 11 zdań fałszywych.*

Z36. Problem jest jednak głęboki i pozrywać można boki, gdy się bez przygotowania do takiego weźmie zdania:
To zdanie jest fałszywe. !

Z37. I wróćmy do zadań rozwiązywalnych (choć – mam nadzieję – niebanalnych)!
Ostatnio mi się przyśniło, że domek zbuduję, aż miło, gdzieś na Ziemi Szczecińskiej, domek dla Pani Śliwińskiej.
(Żeby ciekawość Waszą ugasić – nie myślę tutaj wcale o Kasi!)*
By oświetlić salę balową, instalację mam już gotową: wokół sali, na tarasie, 100 włączników da się.
Uwagę zrobię tu szczerą – każdy w pozycji jeden być może lub zero.
Instalację całą dawno podłączyłem, wszystkie włączniki w pozycji 1 ustawiłem,
zda się jednak, że nadaremno – w sali bowiem wciąż jest ciemno!
Lecz jeśli którykolwiek włącznik teraz się przestawi, światło w sali się pojawi!
Każdym kolejnym przestawieniem stan światła w sali zmienię
i nie ma przy tym znaczenia, pozycję którego włącznika zmieniam.
(Dowolnie zatem pstryk, pstryk, pstryk i światła ni ma, jest i znów ni ma w mig!)
Obwód zatem prawie magiczny, realizuje pewien spójnik logiczny
(działający na stanach włączników oczywiście), więc śmiało myślcie i piszcie,
jakaż to funkcja, Kochani – o to jesteście właśnie pytani!

* Zadanie było układane, gdy do klasy, którą uczyłem, uczęszczała niejaka Katarzyna... Śliwińska! ☺

Z38. Uwaga: zadanie wartościowe (również) dla Informatyków! (Chodzi o tzw. kontrolę parzystości).
Zenek (zamiast jechać na jakieś obozy) ułożył niedawno tabelkę 100×100 , wypełniając jej pola poza ostatnim wierszem i ostatnią kolumną zerami i jedynekami. Ostatnią kolumnę poza ostatnim wierszem wypełnił tak, żeby suma liczba w każdym wierszu była parzysta, a ostatni wiersz poza ostatnim polem tak, żeby w każdej kolumnie była parzysta liczba jedynek. Zadowolony z siebie Zenek zasnął, a wtedy czyhający na taką gratkę złośliwy gnom zanegował jedną wartość w jego tabliczce...

Mimo to po przebudzeniu Zenek był w stanie odtworzyć oryginalny układ bitów (zer i jedynek). Jak to zrobił? (Zenek zdecydował nie używać czarów, tylko rozumu). Co to ma wspólnego z pewnym znanym nam spójnikiem logicznym?
A gdyby gnom zanegował dwa bity? (Co Zenek byłby w stanie stwierdzić?)
A gdyby wiedział tylko, że gnom zanegował maksymalnie dwa bity?

Z39. Uwaga: zadanie wartościowe (również) dla Informatyków! (Jak dzięki znajomości logiki matematycznej i może jeszcze czegoś realizować pewne zadania (szybko i praktycznie bez zużycia pamięci)).
Komputer wczytuje 9876556789 danych będących liczbami całkowitymi z przedziału $[1, 2^{64}]$, przy czym każda wartość poza jedną, która się nie powtarza, występuje dwukrotnie. Jak, w ciągu kilku sekund(!), stwierdzić, która to liczba?

Z40*. Jaś i Małgosia znów pojmani przez straszną wiedźmę! Tym razem mogą ocalić życie, jeśli uda im się wygrać następującą grę: na polach szachownicy 8×8 wiedźma położy monety, każdą dowolnie – orłem lub reszką, następnie pokaże Jasiowi tę szachownicę i wskaże mu jedno pole. Jaś może obrócić dowolną z monet. Potem wiedźma zamknie

Jasia w komórce i wypuści oboje dzieci, jeżeli Małgosia odgadnie (za jednym razem), które pole wiedźma wskazała Jasiowi. Jaką strategię powinny przyjąć dzieci? (Muszą ją ustalić przed zobaczeniem przez Jasia szachownicy!) Istnieje taka, która gwarantuje im wolność, i to bez używania żadnych czarów, naprawdę! Podpowiedź: jak myślisz – czego Jaś i Małgosia uczyli się niedawno w III LO?

Z41**. Kolejnym nieoczekiwanym zastosowaniem alternatywy wykluczającej może być strategia w grze „nim” (prawdopodobnie pochodzenia chińskiego, w Europie znana już co najmniej w XV w.; nazwa pochodzi prawdopodobnie ze staroangielskiego albo niemczyzny (por. też biorącą się z tego samego nazwę znanych cukierków do ssania z witaminami), ale to już nie tutaj...

Z42. Skąd nieoczekiwany raczej efekt zastosowania pewnego (jakiego?) schematu rozumowania do własności sera z dziurami? Więcej sera. $\Rightarrow$ Więcej dziur. $\wedge$ Więcej dziur. $\Rightarrow$ Mniej sera. – czyli: Więcej sera. $\Rightarrow$ Mniej sera.

Z43. Nie do wszystkiego powinniśmy stosować ściśle matematyczne zasady – co da zastosowanie prawa skreśleń w równaniu: ZAPALKI + DZIECKO = POŻAR ?

43'. A co implikuje reklama pewnego kościoła w USA: TRUTH + GOD = LIFE ?

Zet czterdzieści i cztery: Słabo jest też (w języku, nie logice!) z przemiennością zdań połączonych spójnikiem „i” – rozważ np.: p : Wsiadł na motocykl. i q : Odjechał. :)

Z45. Zgadnij, jakie słowo się tu rozsypało: C F E N K J U !

Z46. Narysuj wykres funkcji:

f o dziedzinie $\mathbf{Z}_+$ i wzorze $f(x) = \text{NWD}(x, 4)$ (A gdyby jej dziedzinę powiększyć do $\mathbf{N}$?);

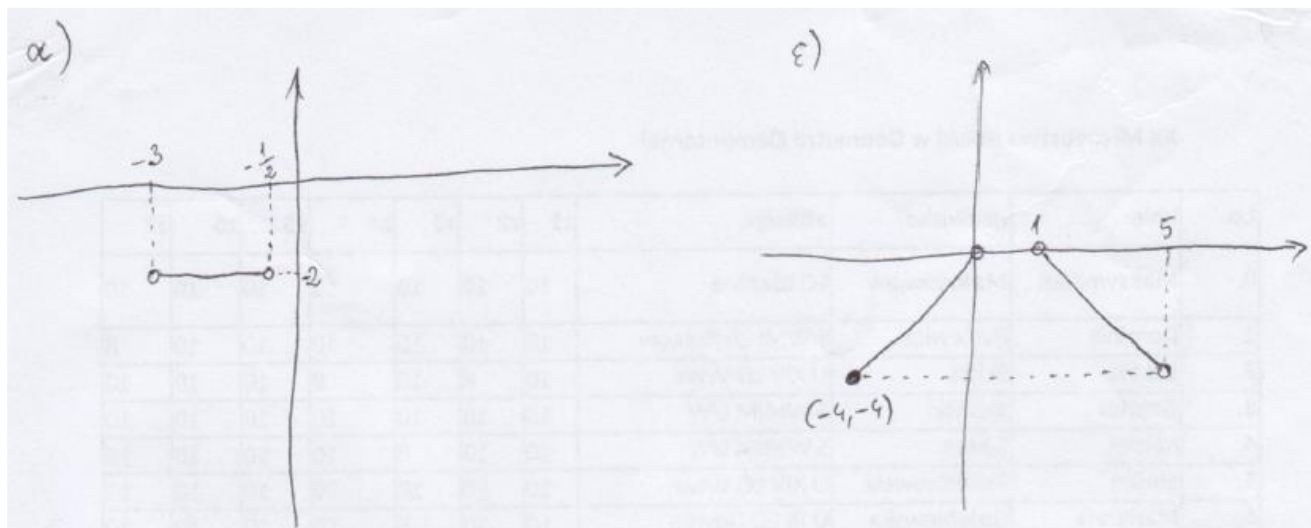
g o dziedzinie $\mathbf{Z}$ i wzorze $g(x) = -x$ (A gdyby jej dziedzinę rozszerzyć do $\mathbf{R}$?);

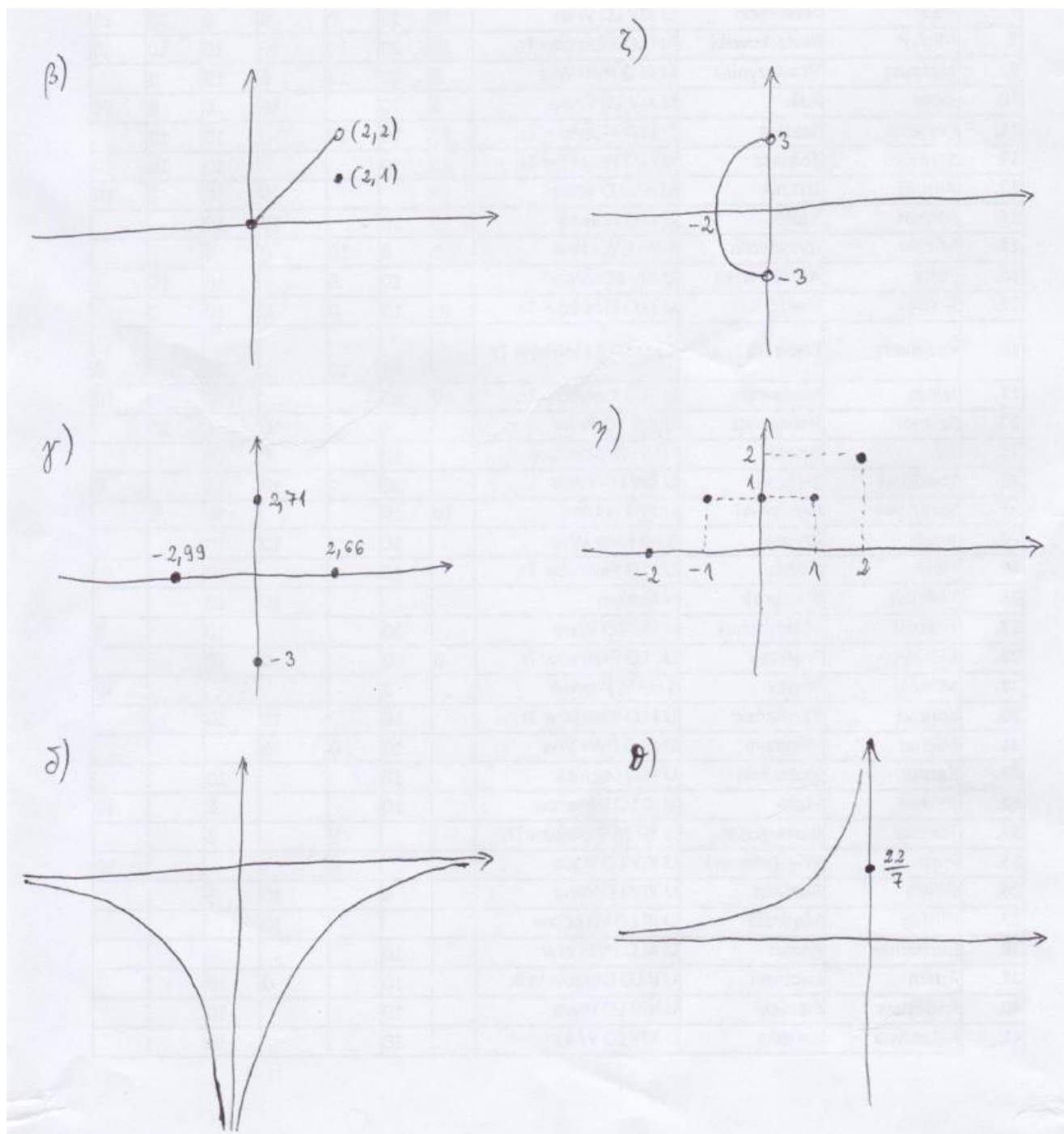
h o dziedzinie $\{-4, -3, -2, -1, 1, 3, 5, 7\}$ i wzorze $h(x) = 1/x$ (A gdyby do dziedziny dorzucić jej jeszcze $1/2$, $1/3$ i $1/4$?

A liczby do nich przeciwne? A pozostałe liczby całkowite poza zerem i ich odwrotności?)

Z47. Czy dana figura jest wykresem jakiejś funkcji? Jeśli tak, to jaka jest jej (tej funkcji) dziedzina? A zbiór jej wartości?

(Oryginalny skan jest pod www.math.uni.wroc.pl/~msliw/funkcjeNiefunkcje.pdf).





Z48. Funkcja, która spełnia warunek: $\forall y ((\exists x y=f(x)) \rightarrow (\exists! x y=f(x)))$, nazywa się różnowartościową. Które z powyższych funkcji są różnowartościowe?

48'. Umiesz zapisać tę definicję (funkcji różnowartościowej) prościej?

Z49. (oznaczenia funkcji jak w Z47) Znajdź: $\alpha(\{-2, -1\})$, $\beta(\{0, 1\})$, $\beta(\{0, 1, 2\})$, $\beta(1, 2)$, $\beta([1, 2])$.

49'. Zapisz (symbolicznie), co oznacza zapis $f(A)$ (gdzie f jest funkcją, a A – pewnym zbiorem (nie całkiem dowolnym – bo jakim?)). Wskazówka: $f(A)$ to zbiór... – czego?

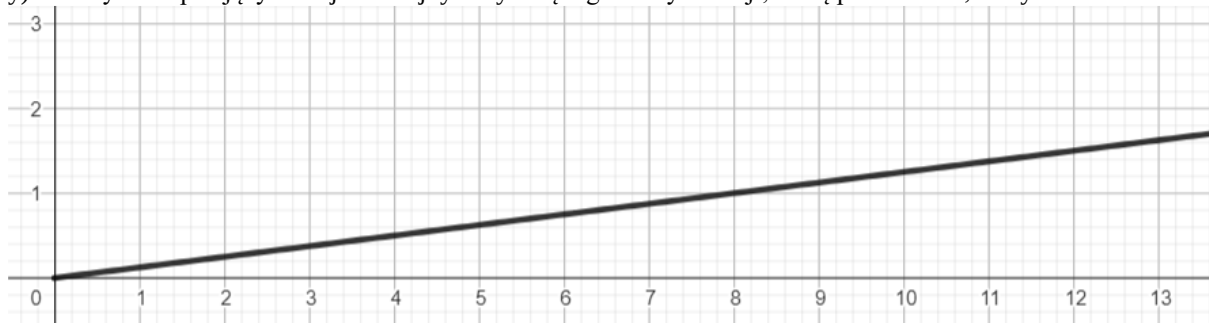
Z50. Spróbuj symbolicznie zapisać definicję funkcji stałej.

Z51.x) Oto definicja funkcji w pewnym języku programowania. Jaka jest jej dziedzina, a jaki zbiór wartości?

```
Function f(x As Integer)
```

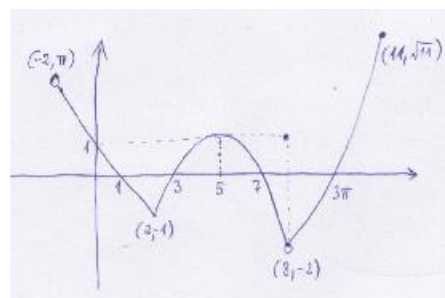
```
  If x < -1 Then f = -x Else If (x >= -1 And x < 5) Or x = 7 Then f = 1 Else f = x
End Function
```

y) Oto wykres opisujący ruch jednostajny. Czym są argumenty funkcji, którą przedstawia, a czym wartości?



z) Dlaczego formy zdaniowe nazywa się też funkcjami? Jakie mogą być ich argumenty, a jakie wartości?

Z52. Przyjrzyj się wykresowi funkcji h z boczku. (Oryginalny skan jest pod <https://www.math.uni.wroc.pl/~msliw/cfankju.pdf>).



- Ustal dziedzinę i zbiór wartości h .
- Które wartości funkcja przyjmuje tylko raz, które dwa razy, które trzy, które cztery, a które jeszcze więcej razy?
- Rozwiąż równanie $h(x) = 0$.
- Ile liczb spełnia równanie $h(x) = -1$? Podaj je z dokładnością do całości.
- Ilu argumentom h przypisuje wartość 1? Podaj je z dokładnością do całości.
- Rozwiąż nierówność: $h(x) < 0$.
- Znajdź zbiory: $h(\{0, 1, 2\})$, $h(\{1, 2, 3\})$, $h(\{1, 3, 5, 7\})$, $h(\{1, 3, 5, 7, 8\})$, $h(\{3, 7, 11\})$, $h((-2, 11))$, $h((0, 11))$, $h([0, 11])$, $h([0, 11])$, $h((0, 1])$, $h((0, 3))$, $h([3, 5])$, $h((3, 7))$, $h((3, 8))$, $h((5, 8))$, $h((5, 8])$, $h([7, 3\pi))$, $h((7, 11))$, ...

Z53. Czy każda prosta w układzie współrzędnych jest wykresem funkcji z X w Y ? Jakie mogą być ich (tych funkcji, których wykresem jest prosta) zbiory wartości?

Z54. Zapisz algorytm/schemat postępowania/twierdzenie pozwalające ustalić, przez które ćwiartki układu współrzędnych przebiega prosta o równaniu $y = ax + b$.

Z55. Jakie równanie ma prosta przechodząca przez punkty $(0, 0)$ i $(7, -1)$?

Z56. Jaki jest kąt nachylenia do dodatniej półosi X prostej o równaniu $y = \frac{1-x\sqrt{3}}{3}$? W jakim punkcie przecina ona oś X ?

Z57. Załóżmy, że dziedziną danej funkcji jest największy możliwy zbiór. Podaj go, naszkicuj wykres i ustal ZW funkcji.

$$f_0(x) = \frac{x}{x}, \quad f_1(x) = \frac{x+2}{x+2}, \quad f_2(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}, \quad f_3(x) = \sqrt{\frac{x}{x}}, \quad f_4(x) = \frac{x^2-3x}{x-3}, \quad f_5(x) = \frac{x^2-3}{x^2-3}, \quad f_6(x) = \frac{x^2+3}{x^2+3}$$

Z58. Niech $A = (7, 1)$, $B = (0, 1)$, $D = (4, 3)$, $P = (4, -1)$ (a oczywiście $O = (0, 0)$). Znajdź (możliwie sprytnie, tzn. minimalizując rachunki) równanie prostej: BO , PO , BA , BD , BP , DP , PA .

Dodatkowo możesz poćwiczyć na wszystkich pozostałych prostych wyznaczonych przez te punkty. (Ile ich jest?)

Z59. Naszkicuj wykres $y = |x|$.

Z60.0. Jakie równanie ma prosta symetryczna do prostej $y = ax$ względem osi Y ? A względem osi X ?

Z60.b. Jakie równanie ma prosta symetryczna do prostej $y = ax + b$ względem osi Y ? A względem osi X ?

Z61. Zaznacz w układzie współrzędnych punkty, których współrzędne spełniają warunek:

- $y \leq x$,
- $y \geq -2x + 6$,
- $\begin{cases} y \leq x \\ y \geq -2x + 6 \end{cases}$,
- $x \in [-5, -2]$,
- $y \in [1, 2]$,
- $\begin{cases} y \geq -7 \\ x \leq 2 \end{cases}$.

Z61'. Zapisz układ nierówności przedstawiający:

- półpłaszczyznę zawierającą $(123, -44)$, której krawędź nie jest pionowa ani pozioma;
- pas zawierający $(123, -44)$;
- inny niż w b) pas zawierający $(123, -44)$, którego przekrój z tamtym pasem jest pasem;
- kąt prosty o wierzchołku w $(3, 7)$;
- jakiś inny kąt prosty o wierzchołku w $(3, 7)$;
- kąt o wierzchołku w $(3, 7)$, którego jedno ramię jest równoległe do którejś osi układu współrzędnych, a drugie nie.

Z62. Jak geometrycznie ustalić, ile rozwiązań może mieć układ $\begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x + b_2 \end{cases}$?

(Wskazówka: jaki zbiór punktów przedstawiają oba równania?)

Z63. Jaki zbiór punktów opisuje równanie $Ax + By + C = 0$?

(Wsk. może to zależeć (podp.: a nawet zależy!) od współczynników A , B i C).

Z64. Jakie są współczynniki kierunkowe prostych: EF , ER , FR , jeśli $E = (-100, 44)$, $F = (123, 44)$, $R = (55, 212)$?

Z65. Jaki jest wyraz wolny we wzorze funkcji liniowej, której wykres ma kąt nachylenia 150° i przechodzi przez:

$$A = (0, -8) \quad B = (1, 2) ?$$

Z66. Podaj b , przy którym odległość prostych $y = -x$ i $y = -x + b$ wynosi ni mniej, ni więcej, tylko 3.

Z67. Podaj c i d , przy których proste $y = -3x + c$ i $y = 0,5x + d$ przecinają się w pktcie $(-7, 8)$.

Z68. Znajdź pkt wspólny prostych (o równaniach) $y = 3 - x$ i $y = 0,5x + 33$.

Z69. Ile rozwiązań ma dany układzik? (Uwaga: to zadanie do rozwiązania bez rozwiązywania (tych układów)!)

$$\text{a)} \begin{cases} y = \frac{3x+8}{12} \\ y = \frac{1}{4}x + \frac{2}{3} \end{cases} \quad \text{a)} \begin{cases} y = -\frac{x\sqrt{3}}{3} + 1 \\ y = x(4 - \sqrt{3}) \\ y = \frac{3-x}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad \text{e)} \begin{cases} y = \frac{7x\sqrt{15}}{8} + 14\pi^2 \\ y = 1\frac{1}{8}x + 14\pi^2 \end{cases}$$

Z70. Jaką figurę przedstawia układ z boczku dla jakich wartości a i b ? $\begin{cases} y \leq x - 3 \\ y \geq ax + b \end{cases}$

Z71. Dla jakich wartości a i b dany układ nie ma rozwiązań? A) $\begin{cases} y \leq x - 3 \\ y > ax + b \end{cases}$ $\Omega) \begin{cases} y \leq x - 3 \\ y < ax + b \end{cases}$

Z72. Ile rozwiązań może mieć układ $\begin{cases} Ax + By = D \\ A'x + B'y = D' \end{cases}$?

(Przypominam, że wiemy już, co mogą przedstawiać takie równania).

Z72'. A gdy oba równania przedstawiają proste (należy wiedzieć, kiedy (tzn. dla jakich zależności między współczynnikami) tak jest), to jak rozpoznać, ile mają one punktów wspólnych?

(Wsk.: można przeanalizować poszczególne przypadki, tak jak to robiliśmy, kiedy dane były proste w postaci kierunkowej, teraz dojdzie tylko jeden przypadek).

Z73. Prosta k ma wzór $y = \frac{1}{3}x - 7$. Podaj równanie prostej:

$\alpha)$ równoległej do k przechodzącej przez $(3, 14)$,

$\beta)$ równoległej do k przechodzącej przez $(6, -5)$,

$\gamma)$ prostopadłej do k przechodzącej przez $(3, 14)$,

$\delta)$ prostopadłej do k przechodzącej przez $(0, -3)$.

Z74. Wykres funkcji liniowej f przechodzi przez $(-3, 14)$. Jakie może być $f(0)$, żeby była to funkcja malejąca?

Z75. Rozwiąż metodą przeciwnych współczynników, najlepiej na dwa sposoby – raz rugując zmienną x , a raz $-y$.

$$\alpha) \begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 2x + 5y = 9 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 4x - 2y = -17 \\ -2x + y = 9 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} 4x - 2y = -18 \\ -2x + y = 9 \end{cases}$$

Z76. Do równania $x - 3y = 5$ dopisz drugie, tak by powstały układ był: a) sprzeczny, b) oznaczony, c) nieoznaczony.

Z77. Przekonaj się, czy umiesz rozwiązać podane układy. (Nie musisz rozwiązywać, ale powinnaś/-nieś umieć! W razie czego pomocą służy WolframAlpha, gdzie wpisuje się np. po prostu „20/21 x+3y=44, -x/17+y/123=7”.)

Jaka jest interpretacja geom. każdego z nich?

Sprawdź, jak zadziała dla nich metoda Cramera, i zachwyć się, jak wszystko(?) fajnie wychodzi.

Gwoli sprawdzenia: Wolfram umie też wyznaczniki – wystarczy wpisać np. „determinant (4,3),(2,1)”!

$$\text{a)} \begin{cases} -3x + 5y = 8 \\ 4x - y = -2 \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} -3x + 5y = 8 \\ 5x - 10y = -16 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} -2x + \frac{y}{2} = 1 \\ 4x - y = -2 \end{cases} \quad \text{d)} \begin{cases} \frac{20}{21}x + 3y = 44 \\ -\frac{x}{17} + \frac{y}{123} = 7 \end{cases}$$

$$\text{e)} \begin{cases} 0x + 0y = -3 \\ -\frac{x}{17} + \frac{y}{123} = 7 \end{cases} \quad \text{f)} \begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ -\frac{x}{17} + \frac{y}{123} = 7 \end{cases}$$

$$\text{ef)} \begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \quad \text{fe)} \begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = -3 \end{cases}$$

Z78*. Jak oblicza się wyznacznik 3×3 , skoro wzory Cramera działają dla dowolnej liczby równań?

Z79. Co dzieje się z wyznacznikami i co wychodzi ze wzorów Cramera, jeśli:

- a) zamienić kolejność równań, b) zamienić miejscami niewiadome,
- c) pomnożyć któreś równanie przez pewną stałą? (Czy ma znaczenie, czy stałą tą jest zero?).

Z80. Załóżmy, że równanie $Ax + By = C$ przedstawia prostą. Jakie mogą być A' , B' i C' , żeby była ona równoległa do $A'x + B'y = C'$? Jaka jest wtedy wartość $\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}$? Jak wynika to z naszej wiedzy o układach równań?

Z34. Co należy zmienić w twierdzeniu Cramera, by obejmowało również układy, w których jedno lub oba równania są stopnia 0?

Z82. Ile rozwiązań ma równanie $|x|+1 = a(x-3)$ w zależności od a ? (Wskazówka: rozważ wykresy funkcji z obu stron równania. Jak wyglądają wykresy $y = a(x-3)$ – co mają wspólnego (dosłownie)? (Wsk.: dla $x = \dots$ zawsze wychodzi...! – czyli jaki punkt na pewno należy do takiej prostej?))

Z83. Rozwiąż układ $\begin{cases} -2\operatorname{tg}x + y\sqrt{3} = 7\sqrt{3} \\ \operatorname{tg}x \cdot \sqrt{3} + y = 2 \end{cases}$. (Wskazówka: układ $\begin{cases} -2x + y\sqrt{3} = 7\sqrt{3} \\ x\sqrt{3} + y = 2 \end{cases}$ rozwiązać umiesz (mam nadzieję!), np. metodą wyznaczników – a jaki jest związek niewiadomej x z pierwszego układu z x z drugiego?)

Z84. Ile rozwiązań ma układ $\begin{cases} -\frac{154}{19}x + y^4 = 372 \\ 12x + \frac{3y^4}{17} = -\frac{19}{13} \end{cases}$? (Wsk.: układ $\begin{cases} -\frac{154}{19}x + y = 372 \\ 12x + \frac{3y}{17} = -\frac{19}{13} \end{cases}$ rozwiązać umiesz (mam nadzieję!), np. metodą wyznaczników, a dzięki niej łatwo się zorientować, jaki znak ma y – co w związku z tym z niewiadomą y z pierwszego układu?)

Z85. Zgadnij... **IGIĄC!**

Uwaga: przypominam, że umówiliśmy się numerować wyrazy od 1 (czyli nie interesuje nas żadne a_0)!

Z86. Zgadnij, jaki może być wzór danego ciągu, jeśli:

$$(a_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$$

$$(b_n) = (4, 16, 36, 64, \dots)$$

$$(c_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots\right)$$

$$(d_n) = \left(1, \frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \frac{1}{49}, \dots\right)$$

$$(e_n) = (1; 0,5; 0,25; 0,125; \dots)$$

$$(f_n) = (1, -1, 1, -1, \dots)$$

(Tutaj wzór można zapisać na dwa trochę różne (ale równoważne) sposoby).

$$(g_n) = (1, -2, 3, -4, \dots)$$

$$(h_n) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right) \quad (\text{Tutaj jak w } f).$$

$$(i_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \frac{5}{26}, \dots\right)$$

$$(j_n) = (101, 103^3, 105^5, 107^7, \dots)$$

$$(k_n) = (1, 3, 7, 15, 31, \dots)$$

$(\ell_n) = (1, 11, 111, 1111, \dots)$ (Podp.: Liczby 9 razy większe to prawie potęgi pewnej popularnej liczby).

$(M_n) = (0, 0, 0, \dots)$ (Ku przestrodze (że wielokropek to tylko konwencja bazująca na powszechności pewnych domniemań): podaj kilka[naście?] początkowych wyrazów ciągu o wzorze $(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)$).

Z87. Oblicz sobie:

$$a = \sum_{k=-10}^{11} k$$

$$b = \sum_{k=-100}^{99} k^3$$

$$c = \sum_{n=1}^{2023} (-1)^n$$

$$d = \sum_{n=3}^{44} 1$$

$$f = \sum_{n=2}^4 \frac{1}{n^2}$$

$$g = \sum_{n=11}^{13} 100n$$

$$h = \sum_{n=100}^{102} (n-99)(n-100)(n-101)$$

$$j = \sum_{n=1}^{44} \frac{1}{n(n+1)} \quad (\text{Podp. (niby głupia, ale...): Oblicz: } 1 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \dots).$$

$$\text{Z88. Podaj prosty wzór na ciągi zadane jako: } s_n = \sum_{k=0}^n 9 \cdot 10^k \quad t_n = \sum_{k=1}^n 2^{-k} \quad u_n = \sum_{k=0}^n (2k+1)$$

(W u wystarczy, jeśli zgadniesz, co wychodzi – dowód dla chętnych (im prostszy, tym lepszy!).)

Z89. Udowodnij (na różne sposoby?), iż (dla każdego n (w domyśle – sensownego – czyli jakiego?):

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \quad (\text{dla prawie dowolnego } q; \text{ w razie trudności jako } q \text{ weź } 2, \frac{1}{2} \text{ i np. } 6).$$

Z90. Zdanie 0: *Każdy kot jest tego samego koloru co on sam.*

Jeśli założymy, że *każde* n kotów *jest tego samego koloru* (założenie indukcyjne), to: jeśli dowolnych $n+1$ kotów ponumerujemy liczbami $0, 1, 2, \dots, n$, to na mocy założenia indukcyjnego koty $0, 1, 2, \dots, n-1$ są tego samego koloru (czyli tego co kot 1), ale koty $1, 2, \dots, n$ również (też na mocy Z_i), i również tego koloru co kot 1, zatem wszystkich tych $n+1$ kotów jest tego samego koloru, czyli z Z_i wynika, że każde $n+1$ kotów jest tego samego koloru.

Czyżby implikacja ta w połączeniu ze zdaniem 0 dawała dzięki zasadzie indukcji matematycznej (ZIM) nieco chyba zaskakujące twierdzenie, że dla dowolnego n każde n kotów (więc w szczególności wszystkie koty żyjące w naszej galaktyce) jest tego samego koloru??

Z91. Nie daj się oszukać! (Pytanie-premia: kto jest autorem poniższego oszustwa?)

OSZUSTWO 16. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$30n < 2^n + 110 \quad (*)$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1$ sprawdzamy bezpośrednio $30 < 2 + 110 = 112$.

2° Załóżmy, że $30n < 2^n + 110$. Udowodnimy nierówność

$30(n+1) < 2^{n+1} + 110$. Stosując założenie indukcyjne otrzymujemy ciąg nierówności:

$$30(n+1) = 30n + 30 < 2^n + 110 + 30 = 2^{n+1} + 110 + 30 - 2^n < 2^{n+1} + 110,$$

przy czym ostatnia nierówność zachodzi dla $n \geq 5$.

Zatem nierówność (*) została udowodniona dla $n \geq 5$.

Pozostaje sprawdzić, że

dla $n = 2$ mamy $60 < 4 + 110 = 114$,

dla $n = 3$ mamy $90 < 8 + 110 = 118$,

dla $n = 4$ mamy $120 < 16 + 110 = 126$.

Tym samym nierówność (*) jest udowodniona dla wszystkich liczb naturalnych n .

W szczególności wykazaliśmy, że dla $n = 6$ zachodzi nierówność

$$180 < 174.$$

Gdzie tkwi błąd w powyższym rozumowaniu?

Ad Z87 i inne: <https://www.wolframalpha.com/input?i=sum+1%2Fn%5E2%2C+n%3D1+to+infinity>.

$$\text{Z92. Uprość: } a = \sum_{n=11}^{11} n^2, \quad b = \sum_{n=0}^1 2^n, \quad c = \sum_{k=0}^0 \sin\left(\frac{1+k}{3}\pi\right), \quad d = \sum_{n=0}^{98} a_n - \sum_{n=2}^{99} a_n.$$

$$x = \sum_{k=1}^{11} a_{2k} + \sum_{k=1}^{11} a_{2k-1}, \quad y = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Z93. Zapisz bez wielokropka: $u = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + 10$, $v = 0, \underbrace{11 \dots 1}_n$, $w = 10 + 14 + \dots + 998$.

(v i w możesz również obliczyć!)