Zad. 1

ostateczna suma cyfr = pierwiastek cyfrowy (digital root)

W numerologii szczęśliwa cyfra = osc(data urodzenia zapisana jako jedna liczba).

Kuba J. ma szczęśliwą cyfrę = osc(9022003) = osc(16) = osc(7) = 7.

osc(8022003) = 6

osc(10022003) = 8 = osc(20030210)

osc(11022003) = osc(20030211) = 9

osc(20030212) = 1

osc(20030213) = 2

Wartości funkcji osc dla kolejnych liczb nat.: (0,) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, …

* czyli osc(n) = (n mod 9) + 1 - blisko, ale niezupełnie.

Własność: sc(n) ≡ n (mod 9), zatem tak samo z osc: osc(n) ≡ n (mod 9).

n = 2019! => n mod 9 = 0 => osc(n) mod 9 = 0 => osc(n) = 9

Niezmiennikiem jest reszta z dzielenia kolejnej sumy cyfr przez 9.

Niezmiennik dla operacji f : A -> A to taka funkcja g : A -> B, że g(a) = g(f(a)).

(U nas f = sc (A = **N**), a g = mod 9).

Zad. 2

Kolorujemy tak, żeby 61 było czarnych i 60 białych (czyli pola narożne są czarne).

Po przesunięciu wszystkich monet 61 z nich wyląduje na białych, a 60 na czarnych, ale szachownica ma 61 czarnych pól, więc przynajmniej jedno z nich będzie puste.

Zad. 3

2 plusy -> 1 plus

2 minusy -> 1 plus

plus i minus -> minus

Więc z układu p plusów i m minusów powstać mogą: (p-1, m), (p+1, m-2), (p-1, m), czyli w każdym przypadku niezmienna pozostaje parzystość liczby m. Dochodzimy do układu (1, 0) albo (0, 1), więc możliwy jest tylko (0, 1) (bo m wynosiło na początku 15).

INACZEJ:

Zastąpmy plusy zerami, a minusy jedynkami. Wtedy po każdym ruchu niezmienna pozostaje suma liczb na tablicy mod 2, czyli jest ona cała czas nieparzysta, więc kiedy zostanie jeden znak (jedna liczba) - czyli suma wyniesie 0 lub 1, musi być to 1.

JESZCZE INACZEJ:

Zastąpmy plusy liczbami dodatnimi (np. jedynkami, ale niekoniecznie nawet musi to być jedna wartość, np. mogą być to liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10), a minusy - ujemnymi. Po każdym ruchu niezmienny pozostaje znak iloczynu, więc kiedy pozostanie jedna liczba, musi być ujemna.

Zad. 4

Przy standardowym kolorowaniu każdy kamień domina pokrywa jedno pole białe i jedno czarne, ale przeciwległe naroża są tego samego kolory, czyli pól czarnych jest 30, a białych - 32 albo odwrotnie. Więc sprzeczność, bo nie jest ich tyle samo.

Zad. 6

Jeżeli kapelusznicy mają w sumie n monet, to po ruchu mają w sumie albo n-2 (kapelusznik rozdaje sąsiadom), albo n+2 (człowiek bez kapelusza rozdaje sąsiadom). Początkowe n=14, a niezmiennikiem jest parzystość n, więc niemożliwe jest n=7.

Zad. 8

Opiszmy sytuację trójką liczb (których suma jest zawsze 45), wówczas ruch z sytuacji  
(a, b, c) może dać: (a-1, b-1, c+2), (a-1, b+2, c-1) albo (a+2, b-1, c-1).  
Nie zmienia się więc reszta z dzielenia różnicy między dowolnymi dwiema przez 3.

Symbolicznie: jeżeli z trójki (x, y, z) otrzymano (x’, y’, z’), to mod 3:  
x-y ≡ x’-y’,

x-z ≡ x’-z’,

i y-z ≡ y’-z’.

W sytuacji końcowej wszystkie trzy różnice przystają do 0 (mod 3), a na początku 15-13 ≡ 2 - sprzeczność.

Prościej: różnica liczby zielonych i żółtych przystaje na początku do -1 (czyli 2) mod 3, a po każdym ruchu zmienia się o 0 lub 3, więc nie może stać się 0.

Zad. 13

Jeśli w którejś kolumnie lub którymś wierszu suma jest ujemna, to zamieniamy wszystkie jej/jego elementy na przeciwne (wówczas suma ta staje się dodatnia).

Suma wszystkich liczb z szachownicy na pewno wzrosła (półniezmiennik).

Jeżeli nadal któraś kolumna lub któryś wiersz ma sumę ujemną, to robię z nią/nim to samo. Zachowuje się więc półniezmiennik.