

ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 8

24.11.2025

- Niech $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Korzystając z definicji oblicz $f'(8)$.
- Niech $f(x) = x^5$. Korzystając z definicji wyprowadź wzór na $f'(x)$.
- Niech $n \in \mathbb{N}$. Dobierz stałe a, b, c tak, aby funkcja

$$f_n(x) = \begin{cases} |x| & : |x| \geq 1/n, \\ ax^2 + bx + c & : |x| < 1/n \end{cases}$$

była różniczkowalna. Oblicz pochodną $f'_n(x)$, naszkicuj wykres funkcji $f_n(x)$ oraz wykres pochodnej.

- Oblicz pochodną następujących funkcji. Podaj w jakim zbiorze istnieje pochodna:

- | | |
|---|--|
| (a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$, | (b) $f(x) = (\sqrt{x} + 1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$, |
| (c) $f(x) = \frac{1 - x^3}{1 + x^3}$, | (d) $f(x) = (1 + \sqrt{x})(1 + x^{1/3})(1 + x^{1/4})$, |
| (e) $f(x) = (x^2 + 1)^4$, | (f) $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$, |
| (g) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, | (h) $f(x) = (1 + 2x)^{30}$, |
| (i) $f(x) = \left(\frac{1}{1 + x^2}\right)^{1/3}$, | (j) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^4 - x^8}}$, |
| (k) $f(x) = 2^{x+3}$, | (l) $f(x) = x10^x$, |
| (m) $f(x) = \frac{x}{e^x}$, | (n) $f(x) = x^2(x + 1)e^x$, |
| (o) $f(x) = e^x \log x$, | (p) $f(x) = \frac{\log x}{e^x}$, |
| (q) $f(x) = e^{x^2}$, | (r) $f(x) = x^{10} \log x$, |
| (s) $f(x) = e^{e^x}$, | (t) $f(x) = \log \log x$, |
| (u) $f(x) = \log_{10}(x - 1)$, | (v) $f(x) = 10^{2x-3}$, |
| (w) $f(x) = 2^{3^x}$, | (x) $f(x) = \log_2 \log_3(\log_5 x) $, |
| (y) $f(x) = e^{\sqrt{\log x}}$, | (z) $f(x) = x^{x^2}$, |
| (aa) $f(x) = x^{x^x}$, | (ab) $f(x) = x^{\sqrt{x}}$, |
| (ac) $f(x) = (\log x)^x$, | (ad) $f(x) = e^{-x^2} \log x$, |
| (ae) $f(x) = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$, | (af) $f(x) = x^5(x^6 - 8)^{1/3}$, |
| (ag) $f(x) = e^{2x+3}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)$, | (ah) $f(x) = \log \frac{1}{1+x}$, |
| (ai) $f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^x + e^{-x}}$, | (aj) $f(x) = x ^3$, |
| (ak) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, | (al) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ x^2 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$, |

- | | |
|---|---|
| (am) $f(x) = e^{- x }$, | (an) $f(x) = \sqrt{\sqrt{1+x^2}-1}$, |
| (ao) $f(x) = \{x\}$, | (ap) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x < 0, \\ x^2 & \text{dla } x \geq 0, \end{cases}$ |
| (aq) $f(x) = \operatorname{sgn}(x^5 - x^3)$, | (ar) $f(x) = \frac{\pi^{10}}{\pi - e}$, |
| (as) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{dla } x < 0, \\ 1+x & \text{dla } x \geq 0, \end{cases}$ | (at) $f(x) = x^7 + e^2$, |
| (au) $f(x) = (x+e)^{20}$, | (av) $f(x) = e^e$. |

5. Potrzebna jest kadź w kształcie walca, otwarta od góry, której dno i bok wykonane są z tego samego materiału. Kadź ma mieć pojemność 257 hektolitrow. Jaki powinien być stosunek średnicy dna do wysokości kadzi, aby do jej wykonania zużyć jak najmniej materiału?

6. Znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji określonej podanym wzorem w podanym przedziale:

- | | |
|--|--|
| (a) $f(x) = x^2 + 2x + 21$, $[-2, 7]$, | (b) $f(x) = x^2 - 1 + 3x$, $[-2, 2]$, |
| (c) $f(x) = x+1 + x^2$, $[-10, 10]$, | (d) $f(x) = 10x-1 + x^3$, $[0, 1]$, |
| (e) $f(x) = \log(x) - \frac{x}{10}$, $[1, e^3]$, | (f) $f(x) = \sin(x) + \frac{x}{2}$, $[0, 2\pi]$, |
| (g) $f(x) = x^{1/x}$, $[2, 4]$, | (h) $f(x) = 3\sin(x) + \sin(3x)$, $[0, 2\pi]$. |

7. Oblicz granice:

- | | |
|---|--|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right)$, | (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$, |
| (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)}$, | (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos(x) + x^2 - 2}{x\sin(x) - x^2}$, |
| (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x}$, | (f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x}$, |
| (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$, | (h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{e^x} - e}{x}$, |
| (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$, | (j) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x)}{x-1}$, |
| (k) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x) - x + 1}{(x-1)^2}$, | (l) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\log \log(x)}{x-e}$, |
| (m) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{e^x}$, | (n) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^x - 4}{x-2}$. |