

ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 4

27.10.2025

1. Udowodnij nierówność Bernoulliego: dla $x \geq 0$ oraz dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

2. Pokaż, że dla $x > 0$ i dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$(1+x)^n > 1 + \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

3. Udowodnij, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzą równości

$$(a) \quad \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n,$$

$$(b) \quad \sum_{\substack{k=1 \\ k\text{-nieparzyste}}}^n \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k\text{-parzyste}}}^n \binom{n}{k}.$$

4. Oblicz granice (wsk.: wykorzystaj definicję liczby e):

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

5. Znajdź granice ciągów:

$$(a) a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}, \quad (b) a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n}.$$

6. Dla jakich liczb rzeczywistych α istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n + n^\alpha} - \sqrt[3]{n}.$$

Oblicz granicę dla tych α dla których istnieje.

7. Oblicz granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3}.$$

8. Oblicz granice ciągów:

$$(a) a_n = \frac{\sin^2 n}{n}, \quad (b) a_n = \sqrt[n]{\log n}, \quad (c) a_n = \frac{1}{n^2} \log \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right).$$

9. Udowodnij, że jeżeli $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$ to także $|a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |g|$. Pokaż też, że powyższe twierdzenie nie działa w drugą stronę, to znaczy znajdź ciąg $\{a_n\}$ który nie jest zbieżny, chociaż $\{|a_n|\}$ jest zbieżny.

10. Udowodnij, że jeżeli $|a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ to także $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

11. Udowodnij, że jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny i $a_n \geq 0$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 0.$$

12. Udowodnij, że jeżeli ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ spełniają $a_n \leq b_n$ i są zbieżne, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

13. Pokaż, że jeżeli $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ oraz ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 0.$$

14. Pokaż, że jeżeli $a_n > 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, oraz $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$$

(granica niewłaściwa).

15. Niech $a_n = \frac{\sqrt{n^2 + n}}{n}$ oraz $\epsilon = \frac{1}{100}$. Znajdź $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geq n_0$ zachodzi $|a_n - 1| < \epsilon$.