Pierwsza litera nazwiska

1

Kolokwium 2
16.12.16

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Znajdź granicę

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$$

Rozwiązanie: Zapisujemy

$$x^{1/x} = e^{\frac{\log x}{x}},$$

i liczymy granicę, używając de l'Hospitala:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} \overset{\text{d l'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Z ciągłości e^x mamy

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x}} = e^0 = 1.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Dobierz parametr α tak, aby krzywa

$$y = x^3 + \alpha x^2 + 1$$

miała punkt przegięcia w $x = 1$.

Rozwiązanie: Liczymy 2 pochodną

$$(x^3 + \alpha x^2 + 1)'' = (3x^2 + 2\alpha x)' = 6x + 2\alpha.$$

Jeżeli ta funkcja ma zmieniać znak przy $x = 1$, to musi być $\alpha = -3$. W tym przypadku krzywa jest wklęsła dla $x < 1$ i wypukła dla $x > 1$.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Oblicz przybliżoną wartość $\sqrt[7]{126}$ korzystając trzech początkowych wyrazów (zerowego, pierwszego i drugiego) odpowiednio dobranego szeregu Taylora. Oszacuj błąd przybliżenia na podstawie wzoru Taylora.

Rozwiązanie: Niech $f(x) = \sqrt[7]{x}$. Ze wzoru Taylora mamy:

$$f(126) = f(128-2) \simeq f(128) + \frac{f'(128)\cdot(-2)}{1!} + \frac{f''(128)\cdot(-2)^2}{2!}.$$

Będą nam potrzebne 3 pochodne:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{7}x^{-\frac{6}{7}}, \qquad & f'(128) &= \frac{1}{7\cdot 2^6}, \\ f''(x) &= -\frac{6}{49}x^{-\frac{13}{7}}, \qquad & f''(128) &= -\frac{3}{49\cdot 2^{12}}, \\ f'''(x) &= \frac{6\cdot 13}{343}x^{-\frac{20}{7}}. \end{aligned}$$

Wstawiając do wzoru, otrzymujemy

$$f(126) \simeq 2 - \frac{1}{7\cdot 2^5} - \frac{3}{49\cdot 2^{11}} = \frac{200253}{100352}.$$

Szacujemy błąd:

$$|R| = \left|\frac{f'''(128-\theta\cdot 2)\cdot(-2)^3}{3!}\right| = \frac{104}{343}\,(128-\theta\cdot 2)^{-\frac{20}{7}} \le \frac{104}{343}\,(125)^{-\frac{8}{3}} = \frac{104}{343\cdot 5^8} = \frac{104}{133984375}.$$

Ostatnie oszacowanie jest przykładowe.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Oblicz pochodną funkcji

$$f(x) = \arcsin\sqrt{x^3}.$$

Rozwiązanie: Korzystamy z reguły łańcuchowej:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x^3})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^3}} \cdot 3x^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Oblicz całkę:

$$\int x \log(x^2 + 1)\, dx.$$

Rozwiązanie: Całkujemy przez podstawienie:

$$\int x \log(x^2+1)\, dx = \begin{Bmatrix} t = x^2 + 1 \\ dt = 2xdx \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \int \log t\, dt = \frac{1}{2}\, t \log t - \frac{1}{2}\, t + C = \frac{(x^2+1)}{2} (\log(x^2+1) - 1) + C.$$

Ostatnią całkę $\int \log t$ liczymy przez części, robiliśmy to na wykładzie.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Oblicz całkę:

$$\int \sqrt{x} \log x \, dx.$$

Rozwiązanie: Całkujemy przez części:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x} \log x \, dx &= \int \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right)' \log x \, dx \\
&= \frac{2}{3} x^{3/2} \log x - \frac{2}{3} \int x^{3/2} \frac{1}{x} \, dx \\
&= \frac{2}{3} x^{3/2} \log x - \frac{2}{3} \int x^{1/2} \, dx \\
&= \frac{2}{3} x^{3/2} \log x - \frac{4}{9} x^{3/2} + C.
\end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Oblicz całkę:

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

Rozwiązanie: Całkujemy przez podstawienie:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} &= \left\{ \begin{array}{c} t = 1-x^2 \\ dt = -2xdx \end{array} \right\} \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{1-t}{t^{3/2}}\,dt \\
&= -\frac{1}{2}\int (t^{-3/2} - t^{-1/2})\,dt \\
&= -\frac{1}{2}\Big(\frac{t^{-1/2}}{-1/2} - \frac{t^{1/2}}{1/2}\Big) + C \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{\sqrt{t}} + 2\sqrt{t}\Big) + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} + C.
\end{aligned}$$