

Pierwsza litera nazwiska

1

**Kolokwium 2**  
**16.12.16**

Nazwisko i imię:

**Zadanie 1.** Znajdź granicę

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$$

**Rozwiązanie:** Zapisujemy

$$x^{1/x} = e^{\frac{\log x}{x}},$$

i liczymy granicę, używając de l'Hospitala:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} \stackrel{\text{d l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Z ciągłości  $e^x$  mamy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x}} = e^0 = 1.$$

Pierwsza litera nazwiska

2

**Nazwisko i imię:**

**Zadanie 2.** Dobierz parametr  $\alpha$  tak, aby krzywa

$$y = x^3 + \alpha x^2 + 1$$

miała punkt przegięcia w  $x = 1$ .

**Rozwiązanie:** Liczymy 2 pochodną

$$(x^3 + \alpha x^2 + 1)'' = (3x^2 + 2\alpha x)' = 6x + 2\alpha.$$

Jeżeli ta funkcja ma zmieniać znak przy  $x = 1$ , to musi być  $\alpha = -3$ . W tym przypadku krzywa jest wklęsła dla  $x < 1$  i wypukła dla  $x > 1$ .

Nazwisko i imię:

**Zadanie 3.** Oblicz przybliżoną wartość  $\sqrt[3]{126}$  korzystając trzech początkowych wyrazów (zerowego, pierwszego i drugiego) odpowiednio dobranej szeregu Taylora. Oszacuj błąd przybliżenia na podstawie wzoru Taylora.

**Rozwiązanie:** Niech  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ . Ze wzoru Taylora mamy:

$$f(126) = f(128 - 2) \simeq f(128) + \frac{f'(128) \cdot (-2)}{1!} + \frac{f''(128) \cdot (-2)^2}{2!}.$$

Będą nam potrzebne 3 pochodne:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, & f'(128) &= \frac{1}{3 \cdot 2^6}, \\ f''(x) &= -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}, & f''(128) &= -\frac{2}{9 \cdot 2^{10}}, \\ f'''(x) &= \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}. \end{aligned}$$

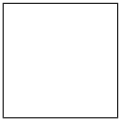
Wstawiając do wzoru, otrzymujemy

$$f(126) \simeq 2 - \frac{1}{3 \cdot 2^5} - \frac{2}{9 \cdot 2^{11}} = \frac{200253}{100352}.$$

Szacujemy błąd:

$$|R| = \left| \frac{f'''(128 - \theta \cdot 2) \cdot (-2)^3}{3!} \right| = \frac{104}{343} (128 - \theta \cdot 2)^{-\frac{20}{3}} \leq \frac{104}{343} (125)^{-\frac{8}{3}} = \frac{104}{343 \cdot 5^8} = \frac{104}{133984375}.$$

Ostatnie oszacowanie jest przykładowe.



Pierwsza litera nazwiska

4

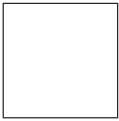
**Nazwisko i imię:**

**Zadanie 4.** Oblicz pochodną funkcji

$$f(x) = \arcsin \sqrt{x^3}.$$

**Rozwiązanie:** Korzystamy z reguły łańcuchowej:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x^3})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^3}} \cdot 3x^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 - x^3}}.$$



Pierwsza litera nazwiska

5

Nazwisko i imię:

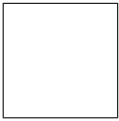
**Zadanie 5.** Oblicz całkę:

$$\int x \log(x^2 + 1) dx.$$

**Rozwiązanie:** Całkujemy przez podstawienie:

$$\int x \log(x^2 + 1) dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 + 1 \\ dt = 2x dx \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \log t dt = \frac{1}{2} t \log t - \frac{1}{2} t + C = \frac{(x^2 + 1)}{2} (\log(x^2 + 1) - 1) + C.$$

Ostatnią całkę  $\int \log t$  liczymy przez części, robiliśmy to na wykładzie.



Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

**Zadanie 6.** Oblicz całkę:

$$\int \sqrt{x} \log x \, dx.$$

**Rozwiązanie:** Całkujemy przez części:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x} \log x \, dx &= \int \left( \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right)' \log x \, dx \\ &= \frac{2}{3} x^{3/2} \log x - \frac{2}{3} \int x^{3/2} \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{2}{3} x^{3/2} \log x - \frac{2}{3} \int x^{1/2} \, dx \\ &= \frac{2}{3} x^{3/2} \log x - \frac{4}{9} x^{3/2} + C. \end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Oblicz całkę:

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

Rozwiązanie: Całkujemy przez podstawienie:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} &= \left\{ \begin{array}{l} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x dx \end{array} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{1-t}{t^{3/2}} dt \\ &= -\frac{1}{2} \int (t^{-3/2} - t^{-1/2}) dt \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{t^{-1/2}}{-1/2} - \frac{t^{1/2}}{1/2} \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\sqrt{t}} + 2\sqrt{t} \right) + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$