ANALIZA MATEMATYCZNA B3

LISTA ZADAŃ 5

28.11.2016

(1) Oblicz całki podwójne:

(a) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(x+y+1)^3}, \qquad D=[0,2]\times[0,1],$

(b) $\displaystyle\iint_D x\,\sin xy\,dxdy, \qquad D=[0,1]\times[\pi,2\pi],$

(c) $\displaystyle\iint_D \min\{x,y\}\,dxdy, \qquad D=[0,1]\times[0,2],$

(d) $\displaystyle\iint_D [x+y]\,dxdy, \qquad D=[0,2]\times[0,2],$

(e) $\displaystyle\iint_D |x-y|\,dxdy, \quad D=\{x\geq 0,\ 0\leq y\leq 3-2x\}.$

(f) $\displaystyle\iint_D (xy^4+y^2)\,dxdy, \quad D=[-1,1]\times[0,1].$

(g) $\displaystyle\iint_D (y\cos x+2)\,dxdy, \quad D=[0,\pi/2]\times[0,1].$

(h) $\displaystyle\iint_D (xye^{x+y})\,dxdy, \quad D=[0,1]\times[0,1].$

(i) $\displaystyle\iint_D (-x\log y)\,dxdy, \quad D=[-1,0]\times[1,2].$

(j) $\displaystyle\iint_D (x^2y^2+x)\,dxdy, \quad D=[0,2]\times[-1,0].$

(k) $\displaystyle\iint_D \Big(-xe^x\sin\frac{\pi y}{2}\Big)\,dxdy, \quad D=[0,2]\times[-1,0].$

(l) $\displaystyle\iint_D x^3y\,dxdy,$ D – obszar ograniczony osią OY i parabolą $x=-4y^2+3$.

(m) $\displaystyle\iint_D (1+xy)\,dxdy, \quad D=\{y\geq 0,\ 1\leq x^2+y^2\leq 2\}.$

(n) $\displaystyle\iint_D y\,dxdy, \quad D=\{0\leq 2x/\pi\leq y,\ y\leq \sin x\}.$

(2) Oblicz objętość bryły ograniczonej przez powierzchnie:

(a) $x=1,\ x=2,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=1+2x+3y,$

(b) $x=-1,\ x=1,\ y=-3,\ y=-2,\ z=0,\ z=x^4+y^2,$

(c) $y = 0,\ z = 0,\ x = 0,\ y - x + z = 1,$

(d) $y = x,\ y = 2x,\ x = 1,\ z = x^2 + y^2,\ x = x^2 + 2y^2,$

(e) $x^2 + y^2 + z^2 = r^2,\ x^2 + y^2 = r(r - 2z),$

(f) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 x,$

(g) $z = x^2 + y^2,\ z = 10.$

(3) Niech funkcja f będzie całkowalna na prostokącie $P \in \mathbb{R}^2$. Pokaż, że wtedy także funkcja $|f|$ jest całkowalna na P, oraz

$$\left| \iint_P f(x,y)\, dxdy \right| \leq \iint_P |f(x,y)|\, dxdy.$$

(4) Pokaż, że jeżeli funkcja f jest całkowalna na prostokącie $P \in \mathbb{R}^2$, a funkcja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to funkcja $g \circ f$ też jest całkowalna na P. W szczególności, jeżeli f jest całkowalna, to f^2 też jest całkowalna.

(5) Załóżmy, że f jest ciągła na $P = [a,b] \times [c,d]$. Dla $(x,y) \in P$ określamy:

$$F(x,y) = \int_a^x \int_c^y f(u,v)\, dvdu.$$

Pokaż, że

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x} = f(x,y).$$

Korzystając z tego podaj niezależny od tego z wykładu dowód na to, że pochodne mieszane rzędu 2 funkcji klasy $C(2)$ są równe.

(6) Funkcję $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ określamy następującym wzorem:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 : & x \text{ jest wymierna} \\ 2y : & x \text{ jest niewymierna.} \end{cases}$$

Pokaż, że całka iterowana

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x,y)\, dy \Big)\, dx$$

istnieje, ale funkcja f nie jest całkowalna.