ANALIZA MATEMATYCZNA
LISTA ZADAŃ 4
24.10.2016

(1) Udowodnij nierówność: $2^k < (k+1)!$ dla każdej liczby naturalnej $k \geq 2$.

(2) Udowodnij nierówność Bernoulliego: dla $x > -1$ oraz dowolnego $n \in \mathbf{N}$ zachodzi

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

(3) Pokaż, że dla $x > 0$ i dowolnego $n \in \mathbf{N}$ zachodzi

$$(1+x)^n > 1 + \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

(4) Udowodnij, że dla dowolnego $n \in \mathbf{N}$ zachodzą równości

(a) $$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n,$$

(b) $$\sum_{\substack{k=1 \\ \text{k-nieparzyste}}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k\text{-parzyste}}}^{n} \binom{n}{k}.$$

(5) Pokaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\binom{2n}{n} < 4^n$.

(6) Udowodnij, że dla dowolnej liczby $a \in \mathbf{R}$ lub $a \in \mathbf{C}$ spełniającej warunek $|a| < 1$ jest $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.

(7) Oblicz granice:
(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \big(1 + \frac{1}{n^2}\big)^n$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \big(1 - \frac{1}{n}\big)^n$.

(8) Znajdź granice ciągów:
(a) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$, (b) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n}$.

(9) Dla jakich liczb rzeczywistych α istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n + n^\alpha} - \sqrt[3]{n}.$$

Oblicz granicę dla tych α dla których istnieje.

(10) Oblicz granicę:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3}.$$

(11) Oblicz granice ciągów:
(a) $a_n = \frac{\sin^2 n}{n}$, (b) $a_n = \sqrt[n]{\log n}$,
(c) $a_n = \frac{1}{n^2} \log\big(1 + \frac{(-1)^n}{n}\big)$.

(12) Udowodnij, że jeżeli $a_n \xrightarrow{n\to\infty} g$ to ciąg wartości bezwzględnych $\{|a_n|\}$ też jest zbieżny, oraz

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |g|.$$

Pokaż też, że powyższe twierdzenie nie działa w drugą stronę, to znaczy znajdź ciąg $\{a_n\}$ który nie jest zbieżny, chociaż $\{|a_n|\}$ jest zbieżny.

(13) Udowodnij, że jeżeli $|a_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ to $\{a_n\}$ też jest zbieżny do 0.

(14) Udowodnij, że jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny i $a_n \geq 0$, to

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq 0.$$

(15) Udowodnij, że jeżeli ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ spełniają $a_n \leq b_n$ i są zbieżne, to

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

(16) Ciąg a_n dany jest następująco: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, oraz

$$a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}, \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots.$$

Pokaż, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}.$$

(17) Pokaż, że jeżeli $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ oraz ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony, to

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0.$$

(18) Pokaż, że jeżeli $a_n > 0$ dla wszystkich $n \in \mathbf{N}$, oraz $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$$

(granica niewłaściwa).

(19) Dany jest ciąg $\{b_n\}$, o którym wiemy, że

$$\forall\ \epsilon > 0\ \forall\ n \geq 10/\epsilon \quad |b_n + 2| < \epsilon.$$

Wskaż M takie, że

$$\forall\ n \in \mathbf{N} \quad |b_n| < M,$$

n_1 takie, że

$$\forall\ n \geq n_1 \quad b_n < 0,$$

n_2 takie, że

$$\forall\ n \geq n_2 \quad b_n > -3,$$

oraz n_3 takie, że

$$\forall\ n \geq n_3 \quad |b_n - 2| > \frac{1}{10}.$$

(20) Niech $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}$ oraz $\epsilon = \dfrac{1}{100}$. Znajdź $n_0 \in \mathbf{N}$ takie, że dla $n \geq n_0$ zachodzi $|a_n - 1| < \epsilon$.