Pierwsza litera nazwiska

Kolokwium 2
4.12.15

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 - 2n + 3}}.$$

Rozwiązanie: Skorzystamy z kryterium porównawczego. Chcemy pokazać, że szereg jest zbieżny (bo $3/2 > 1$), więc szacujemy od góry:

$$\frac{1}{\sqrt{n^3 - 2n + 3}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3 - 2n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3 - \frac{n^3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n^3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{n^{3/2}}.$$

Ostatnia nierówność powyżej zachodzi dla $\frac{n^3}{2} \geq 2n$ czyli $n^2 \geq 4$, czyli $n \geq 2$. Ponieważ szereg $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ jest zbieżny, to nasz szereg też.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Dobierz parametry a, b tak, aby podana funkcja była ciągła.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & : \ x \leq -1 \\ ax+b & : \ -1 < x \leq 2 \\ -x^2+6 & : \ 2 < x. \end{cases}$$

Rozwiązanie: Poza punktami sklejenia funkcja jest wielomianem, a więc jest ciągła. Pozostaje problem ciągłości w punktach sklejenia, czyli w -1 i 2.
$x = -1$:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} x^2 = 1, \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} ax+b = -a+b.$$

Otrzymujemy równanie $-a+b=1$.
$x = 2$:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} ax+b = 2a+b, \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} -x^2+6 = -4+6 = 2.$$

Otrzymujemy drugie równanie $2a+b=2$. Rozwiązaniem tych równań jest $a = \frac{1}{3}, \ b = \frac{4}{3}$.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Oblicz pochodną podanej funkcji, i wyznacz zbiór na którym pochodna istnieje:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{6 - \sqrt{x^2+1}}}.$$

Rozwiązanie: Dziedziną tej funkcji są te $x \in \mathbb{R}$, dla których $\sqrt{x^2+1} < 6 \iff x^2+1 < 36 \iff |x| < \sqrt{35}$. Na całym tym zbiorze istnieje pochodna, gdyż f jest funkcją złożoną $y = \sqrt{x^2+1}$, $z = (6-y)^{-\frac{1}{2}}$, i obie funkcje składowe są różniczkowalne.

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\left(6 - \sqrt{x^2+1}\right)^{-\frac{3}{2}}(-1)\,\frac{1}{2}\,(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\,2\,x = \frac{x}{2\left(\sqrt{6-\sqrt{x^2+1}}\right)^3\sqrt{x^2+1}}.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Znajdź najmniejszą i największą wartość podanej funkcji na podanym przedziale

$$f(x) = |x^2 - 1| + x, \qquad [-2, 1].$$

Rozwiązanie: Końce przedziału to $-2,\ 1:\ f(-2) = 3 - 2 = 1,\ f(1) = 1$. Punkty nieróżniczkowalności to $x = \pm 1,\ f(-1) = -1$. Sprawdźmy punkty krytyczne. Dla $x \in [-1, 1]$ $f(x) = 1 - x^2 + x \Rightarrow f'(x) = -2x + 1 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. $\frac{1}{2}$ jest punktem krytycznym, $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$. Dla $x \in [-2, -1]$ $f(x) = x^2 - 1 + x \Rightarrow f'(x) = 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$, poza zakresem. f ma więc tylko 1 punkt krytyczny. Porównując wartości w $-2, -1, -\frac{1}{2}, 1$ widzimy, że wartość najmniejsza to -1 a największa to $\frac{5}{4}$.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Ustal, dla jakich $p > 0$ funkcja $|x|^p$ jest różniczkowalna w 0. Oblicz pochodną tej funkcji (w dowolnym punkcie) dla takich p.

Rozwiązanie: Dla $x > 0$ mamy

$$f(x) = x^p \implies f'(x) = p\,x^{p-1} = p\,|x|^{p-1}.$$

Dla $x < 0$ mamy

$$f(x) = (-x)^p \implies f'(x) = p\,(-x)^{p-1} \cdot (-1) = -p\,|x|^{p-1}.$$

Dla $x \neq 0$ funkcja jest więc różniczkowalna niezależnie od $p > 0$. Policzmy granice jednostronne ilorazu różnicowego w 0.

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^-} \frac{(0-h)^p - 0^p}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{(-h)^p}{h} = -\lim_{h\to 0^-} (-h)^{p-1}, \\
\lim_{h\to 0^+} \frac{(0+h)^p - 0^p}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{h^p}{h} = \lim_{h\to 0^+} h^{p-1}.
\end{aligned}$$

Jeżeli $0 < p < 1$ to obie te granice są niewłaściwe $\pm\infty$, dla $p = 1$ pierwsza granica to -1 a druga 1. Dla $0 < p \leq 1$ $|x|^p$ nie jest więc różniczkowalna w 0. Z drugiej strony, jeżeli $p > 1$ to obie granice jednostronne są równe 0, więc $|x|^p$ jest różniczkowalna w 0 i pochodna jest 0. Podsumujmy, dla $p > 1$

$$\Big(|x|^p\Big)' = \begin{cases} p\,|x|^{p-1} & : \ x \geq 0 \\ -p\,|x|^{p-1} & : \ x \leq 0. \end{cases}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Korzystając trzech początkowych wyrazów (zerowego, pierwszego i drugiego) odpowiednio dobranego szeregu Taylora oblicz przybliżoną wartość $\sqrt[3]{126}$. Oszacuj błąd przybliżenia na podstawie wzoru Taylora.

Rozwiązanie: Zauważmy, że $126 = 125 + 1$ i $\sqrt[3]{125} = 5$. Rozważamy więc rozwinięcie Taylora funkcji $f(x) = \sqrt[3]{x}$ wokół punktu $a = 125$. Wzór Taylora zawierający 3 pierwsze wyrazy wygląda następująco:

$$f(126) = f(125) + \frac{f'(125)}{1!} \cdot 1^1 + \frac{f''(125)}{2!} \cdot 1^2 + \frac{f'(125+\theta)}{3!} \cdot 1^3,$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x},\ f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}},\ f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}},\ f'''(x) = \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}},$$

$$f(125) = 5,\ f'(125) = \frac{1}{3}\frac{1}{25},\ f''(125) = -\frac{2}{9}\frac{1}{5^5},$$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{126} \approx 5 + \frac{1}{75} - \frac{2}{9 \cdot 2 \cdot 25 \cdot 125} &= \frac{9 \cdot 5^6}{9 \cdot 5^5} + \frac{3 \cdot 5^3}{9 \cdot 5^5} - \frac{1}{9 \cdot 5^5} \\ &= \frac{9 \cdot 5^6 + 3 \cdot 5^3 - 1}{9 \cdot 5^5} = \frac{140999}{28125}.\end{aligned}$$

Błąd:

$$|R| = \frac{10}{6 \cdot 27}(125+\theta)^{-\frac{8}{3}} \leq \frac{10}{6 \cdot 27 \cdot 125^{\frac{8}{3}}} = \frac{1}{81 \cdot 5^7} = \frac{1}{6328125}.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Znajdź promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+3} x^{3n+2}}{n^2\, 6^{2n}}.$$

Rozwiązanie: Badamy zbieżność z kryterium d'Alemberta. Ustalmy $x \neq 0$.

$$\left| \frac{\dfrac{4^{n+1+3}\, x^{3(n+1)+2}}{(n+1)^2\, 6^{2(n+1)}}}{\dfrac{4^{n+3}\, x^{3n+2}}{n^2\, 6^{2n}}} \right| = |x|^3 \frac{4\, n^2}{36\, (n+1)^2} \xrightarrow{n\to\infty} |x|^3 \frac{4}{36} = |x|^3 \frac{1}{9}.$$

Jeżeli $|x| < \sqrt[3]{9}$ to szereg jest zbieżny, a jeżeli $|x| > \sqrt[3]{9}$ to rozbieżny. Wynika z tego, że $R = \sqrt[3]{9}$.