Pierwsza litera nazwiska

Kolokwium 2
5.12.14

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Sprawdź, czy następujący szereg jest zbieżny, a jeżeli jest, to czy jest zbieżny absolutnie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n(n+1)}(-1)^n.$$

Rozwiązanie: Sprawdzamy najpierw zbieżność absolutną: dla $n \geq 2$ mamy

$$|a_n| = \frac{n-1}{n(n+1)} \geq \frac{n-\frac{n}{2}}{n\,n} = \frac{\frac{n}{2}}{n^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{n}.$$

Z kryterium porównawczego szereg o wyrazach $|a_n|$ jest rozbieżny. Sprawdźmy teraz samą zbieżność. Żeby zastosować kryterium Leibniza potrzebujemy:

$$|a_n| \geq |a_{n+1}|,$$

czyli

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{n(n+1)} &\geq \frac{n}{(n+1)(n+2)} \\ \frac{n-1}{n} &\geq \frac{n}{n+2} \\ (n-1)(n+2) &\geq n^2 \\ n^2+n-2 &\geq n^2 \\ n &\geq 2. \end{aligned}$$

Dla $n \geq 2$ wartości bezwzględne wyrazów szeregu tworzą ciąg malejący (oczywiście do 0), czyli z kryterium Leibniza szereg naprzemienny

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n(n+1)}(-1)^n$$

jest zbieżny. Punkt startowy sumowania ($n = 2$) nie ma znaczenia dla zbieżności. W tym akurat przypadku pierwszy wyraz i tak jest równy 0.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Zbadaj zbieżność szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{\sqrt[3]{n!}}.$$

Rozwiązanie: Stosujemy kryterium d'Alemberta:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{e^{n+1}}{\sqrt[3]{(n+1)!}} \cdot \frac{\sqrt[3]{n!}}{e^n} = e \cdot \sqrt[3]{\frac{n!}{(n+1)!}} = e \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{n+1}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Szereg jest więc zbieżny.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Znajdź promień zbieżności szeregu potęgowego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^{(2n+7)/3}.$$

Rozwiązanie: Ustalamy x, i stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu liczbowego:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot x^{(2(n+1)+7)/3} \cdot \frac{n^n}{n! \cdot x^{(2n+7)/3}}\right| \\
&= |x|^{\frac{2}{3}} \frac{(n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot n!} \\
&= |x|^{\frac{2}{3}} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\
&= \frac{|x|^{\frac{2}{3}}}{(1+\frac{1}{n})^n} \\
&\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \; |x|^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{e}.
\end{aligned}$$

Szereg jest więc zbieżny dla $|x|^{2/3} < e$, i rozbieżny dla $|x|^{2/3} > e$. Promień zbieżności wynosi więc

$$R = e^{\frac{3}{2}}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Udowodnij, że jeżeli jedna z poniższych granic istnieje, to istnieją obie, i są równe:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x+x_0).$$

Rozwiązanie: Załóżmy, że lewa strona istnieje, i jest równa g. Czyli mamy

$$\forall\,\epsilon>0\quad \exists\,\delta>0\quad 0<|x-x_0|<\delta \implies |f(x)-g|<\epsilon. \tag{1}$$

Chcemy pokazać, że prawa strona też istnieje, i jest równa g, czyli

$$\forall\,\epsilon>0\quad \exists\,\delta>0\quad 0<|x|<\delta \implies |f(x+x_0)-g|<\epsilon. \tag{2}$$

Ustalmy $\epsilon > 0$. Dla tego ϵ dostajemy $\delta > 0$ z (1). Niech $0 < |x| < \delta$. Wtedy $x' = x + x_0$ spełnia $0 < |x - x_0| < \delta$, więc z (1) mamy $|f(x') - g| < \epsilon$. Ale to dokładnie znaczy, że $|f(x + x_0) - g| < \epsilon$, czyli spełnione jest (2).

Teraz w drugą stronę, załóżmy, że prawa strona istnieje, i jest równa g, czyli spełnione jest (2). Ustalmy $\epsilon > 0$ i niech $\delta > 0$ będzie dane przez (2). Niech $0 < |x - x_0| < \delta$, i niech $x' = x - x_0$. Wtedy $0 < |x'| < \delta$, więc z (2) mamy $|f(x' + x_0) - g| < \epsilon$, a skoro $x' + x_0 = x$, więc $|f(x) - g| < \epsilon$. Mamy więc (1).

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Wyznacz punkty ciągłości i nieciągłości funkcji

$$f(x) = \sin(x) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{dla } x \neq 0, \qquad f(0) = 0$$

Rozwiązanie: Dla $x \neq 0$ f jest iloczynem funkcji ciągłych, więc jest ciągła. Jedyna wątpliwość dotyczy więc punktu $x = 0$. Zauważmy, że dla $x \neq 0$

$$-|\sin(x)| \leq f(x) \leq |\sin(x)|.$$

Wiemy, że $|\sin(x)|$ jest ciągła, więc jej granica w 0 to $|\sin(0)| = 0$. Z twierdzenia o 3 funkcjach

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0),$$

czyli f jest ciągła także w 0.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Poniższa funkcja nie jest zdefiniowana w punkcie $x = 0$. Zdefiniuj jej wartość w tym punkcie tak, żeby była w nim ciągła

$$f(x) = \frac{\tan 2\,x}{x}.$$

Rozwiązanie: Sprawdźmy istnienie granicy w $x = 0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2\,x}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x\, \cos x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2\, \frac{\sin 2x}{2x}}{\cos x} \\
&= 2\, \frac{\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x}}{\lim_{x\to 0} \cos x} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

f ma więc granicę w $x = 0$, równą 2. Jeżeli zdefiniujemy $f(0) = 2$, to tak powstała funkcja jest ciągła w 0.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Znajdź granicę

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}.$$

Rozwiązanie: Mnożymy i dzielimy przez $\sqrt{7+x}+3$:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4} &= \frac{(\sqrt{7+x}-3)(\sqrt{7+x}+3)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{7+x}+3)} \\
&= \frac{7+x-9}{(x-2)(x+2)(\sqrt{7+x}+3)} \\
&= \frac{x-2}{(x-2)(x+2)(\sqrt{7+x}+3)} \\
&= \frac{1}{(x+2)(\sqrt{7+x}+3)}.
\end{aligned}$$

Mianownik ma w $x=2$ granicę różną od 0, więc

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4} = \frac{1}{(2+2)(\sqrt{7+2}+3)} = \frac{1}{4(\sqrt{9}+3)} = \frac{1}{4\cdot 6} = \frac{1}{24}.$$