METODY NUMERYCZNE
ZADANIA NA LABORATORIUM 2
27.03.2014

(1) Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = (5 - x)e^x - 5$ na przedziale $[0, 5]$.
- Napisz skrypt znajdujący pierwiastek f w przedziale $[4, 5]$ metodą bisekcji, z dokładnością do 6 miejsc po przecinku. Oszacuj bez wykonywania iteracji ile iteracji będzie potrzebne, żeby zlokalizować pierwiastek w przedziale długości co najwyżej 10^{-12}.
- Napisz skrypt wykrywający pierwiastek tej funkcji metodą Newtona, z punktem startowym $x_0 = 5$. Zakończ iteracje kiedy $|f(x_k)| \leq 10^{-8}$. Oszacuj ile iteracji dodatkowo będzie potrzebne, aby $|f(x_k)| \leq 10^{-16}$.
- Napisz skrypt wykrywający pierwiastek metodą siecznych startującą z $x_0 = 4, x_1 = 5$, i wykonaj podobny eksperyment jak w poprzednim punkcie.

(2) Używając metody Newtona oblicz $\sqrt{2}$ z dokładnością do 6 miejsc po przecinku.

(3) Czy można zastosować metodę bisekcji do znalezienia pierwiastków funkcji $f(x) = \sin x + 1$? Czy można zastosować metodę Newtona? Jeżeli tak, jako będzie prędkość zbieżności?

(4) Funkcja
$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - x - 2}$$
ma dokładnie 1 pierwiastek w przedziale $[0, 3]$, w punkcie $x = 1$. Zastosuj metodę bisekcji z przedziałem startowym $[0, 3]$, z tolerancją końcową $\delta = 10^{-3}$. Wyjaśnij, dlaczego metoda nie wydaje się zbieżna. Naszkicuj wykres funkcji.

(5) Zaimplementuj metodę Newtona do następujących funkcji z podanymi punktami startowymi. Wykonaj 5 iteracji w każdym przypadku i wypisz kolejne przybliżenia używając formatu %15.15e, żeby wyświetlić wszystkie cyfry.
- $f(x) = \sin x$, $x_0 = 3$,
- $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$, $x_0 = 3$,
- $f(x) = 1 - 0.01x$, $x_0 = 1$.

(6) Rozważmy funkcję $\varphi(x) = (x^2 + 4)/5$.
- Znajdź punkty stałe φ
- Czy iteracje $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ będą zbieżne do punktu w $[0, 2]$ dla każdego punktu startowego $x_0 \in [0, 2]$?

(7) Rozważmy równanie $a = y - \epsilon \sin y$, gdzie $0 < \epsilon < 1$ oraz $a \in [0, \pi]$ są dane. Napisz to równanie w formie punktu stałego i uzasadnij, że ma jednoznaczne rozwiązanie y.

(8) Funkcja $\varphi(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + x + 2)$ ma punkt stały $x = 1$. Startując z punktu $x_0 = 0.5$, stosując iteracje $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ zbadaj zbieżność powstałego ciągu.