ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 3

14.10.2013

(1) Wyznacz dziedziny naturalne następujących funkcji:

(a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$, (b) $f(x) = \sqrt{2 + x - x^2}$,
(c) $f(x) = \sqrt{3x - x^3}$, (d) $f(x) = \log(x^2 - 4)$,
(e) $f(x) = \log(1 - 2\cos x)$, (f) $f(x) = \sqrt{\sin(\sqrt{x})}$.

(2) Zapisz wzorem $y = f(x)$ złożenie następujących funkcji, i wyznacz dziedzinę naturalną złożenia:
(a) $t = 2^x,\ z = \sqrt[3]{t+1},\ y = z^2$, (b) $t = \sin x,\ z = \log t,\ y = \sqrt{1 + z^2}$.

(3) Naszkicuj wykres funkcji danej wzorem ($[\dots]$ oznacza część całkowitą, a $\{\dots\}$ oznacza część ułamkową):

(a) $f(x) = |x+1| + |x-1|$, (b) $f(x) = |x-3| - 2|x+1| + 2|x| - x + 1$,
(c) $f(x) = x^3 + 3x^2$, (d) $f(x) = -x^3 + 2x - 2$,
(e) $f(x) = 1 - \sin x$, (f) $f(x) = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$,
(g) $f(x) = |\sin x|$, (h) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$,
(i) $f(x) = |x^2 - 1| - |x^2 - 4|$, (j) $f(x) = |x^2 - 8x + 15|$,
(k) $f(x) = x^2 + x + 2 - |x^2 - x - 2|$, (l) $f(x) = \{\cos x\}$,
(m) $f(x) = [\frac{4}{\pi}\arctan x]$, (n) $f(x) = 2\{\sin x\} - \{2\sin x\}$.

(4) Rozwiąż następujące równania i nierówności:

(a) $\sin x \geq \frac{1}{2}$, (b) $|\cos x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$,
(c) $[\sin x] = 0$, (d) $\{\cos x\} = \frac{1}{2}$,
(e) $\{\frac{4}{\pi}\arctan x\} = 0$, (f) $\{\frac{3}{\pi}\arctan x\} \leq \frac{1}{2}$,
(g) $(x^2 - 4)\cdot\cos x \geq 0$, (h) $\left(\frac{3}{2} + \sin x\right)^{\sin x} = 1$.

(5) Znajdź funkcje odwrotne do:

(a) $f(x) = 1 - 3x$, (b) $f(x) = \dfrac{1}{1-x},\ x \neq 1$,
(c) $f(x) = x^2 - 2x,\ x \geq 1$, (d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1},\ x \geq 0$,

(6) Znajdź 10 kolejnych wyrazów oraz granicę ciągu $\{a_n\}$ określonego wzorem: $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$.

(7) Jakie wartości przyjmuje ciąg dany wzorem: $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$?
A ciąg dany wzorem: $a_n = \cos\dfrac{n\pi}{3} + i\sin\dfrac{n\pi}{3}$?

(8) Ciąg Fibonacciego określony jest rekurencyjnie w sposób następujący: $F_1 = F_2 = 1$, a następnie $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Znajdź wyrazy ciągu Fibonacciego o numerach od 3 do 12. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest równość: $F_{n+2}\cdot F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.

(9) Udowodnij, **korzystając jedynie z definicji**, zbieżność ciągów, znajdując ich granice:

(a) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, (b) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$,

(c) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, (d) $a_n = \frac{n+2}{n-1}$, $n \geq 2$,

(e) $a_n = \frac{1}{1+\sqrt{n}}$, (f) $a_n = \frac{3n^3 - 2n^2 - 7n + 5}{4n^3 + n - 6}$.

(10) Udowodnij, że jeśli x jest liczbą rzeczywistą o rozwinięciu dziesiętnym

$$\beta, \alpha_1 \alpha_2 \cdots,$$

to ciąg określony wzorem

$$a_n = \beta, \alpha_1 \cdots \alpha_n$$

jest zbieżny do x (, jest punktem dziesiętnym, a $\beta \in \mathbf{Z}$).

(11) Udowodnij, że granica sumy (różnicy, ilorazu) ciągów zbieżnych jest sumą (różnicą, ilorazem) ich granic. Oczywiście w przypadku ilorazu zakładamy, że ciąg w mianowniku ma wyrazy różne od zera, i że jego granica jest różna od zera.

(12) Zbadaj monotoniczność następujących ciągów:

(a) $a_n = n + \frac{1}{n}$, (b) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n^2 - 2$,

(c) $a_n = \sqrt[n]{n!}$, (d) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$

(e) $a_n = \frac{2^n}{n!}$, (f) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$.

(13) Oblicz granice (być może niewłaściwe) ciągów:

(a) $a_n = \frac{7n + (\sqrt[3]{n}\sqrt[6]{n})^5\sqrt{9n+1}}{11n^3 + 7n + 3}$, (b) $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$,

(c) $a_n = \frac{\sin n}{n}$, (d) $a_n = r^n,\ r > 1$,

(e) $a_n = \sqrt[n]{r},\ 0 < r < 1$, (f) $a_n = 2^n - \frac{1}{n}$,

(g) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$, (h) $a_n = \frac{1+2+4+\cdots+2^n}{1+3+9+\cdots+3^n}$,

(i) $a_n = \frac{1-2+3-4+5-6+\cdots-2n}{\sqrt{n^2+2}}$, (j) $a_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$,

(k) $a_n = \frac{1+3+9+\cdots+3^n}{3^n}$, (l) $a_n = \sqrt{3^n+2^n}\sqrt{3^n+1}$,

(m) $a_n = \sqrt[(n^2)]{n}$, (n) $a_n = \sqrt[n]{n^2}$,

(o) $a_n = n(\sqrt{n^2+7} - n)$, (p) $a_n = \frac{n^2+n+1}{(n+\sin n)^2}$,

(q) $a_n = \frac{n^2+1}{n^3+1} + \frac{n^2+2}{n^3+2} + \frac{n^2+3}{n^3+3} + \cdots + \frac{n^2+n}{n^3+n}$,

(r) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2}$,

(s) $a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+7} - \sqrt{n}}$, (t) $a_n = r^n,\ -1 < r < 1$.

(14) Wypisz wzorem ciąg, dla którego $a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2}$, i każdy z wyrazów jest średnią harmoniczną dwóch wyrazów sąsiednich:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}\right), \quad n \geq 2.$$

(15) Wypisz wzorem ciąg, dla którego $a_1 = 1,\ a_2 = 2$, i każdy z wyrazów jest średnią geometryczną dwóch wyrazów sąsiednich:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}, \quad n \geq 2.$$