Egzamin końcowy - 2 termin
14.02.11

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Oblicz granicę ciągu

$$a_n = \frac{n^2+1}{n^3+1} + \frac{n^2+2}{n^3+2} + \frac{n^2+3}{n^3+3} + \cdots + \frac{n^2+n}{n^3+n}$$

Rozwiązanie: Wyraz a_n jest sumą n składników $\frac{n^2+i}{n^3+i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Mamy oczywiście

$$\frac{n^2+1}{n^3+n} \leq \frac{n^2+i}{n^3+i} \leq \frac{n^2+n}{n^3+1},$$

a więc, dodając stronami dla $i = 1, 2, \ldots, n$

$$n\,\frac{n^2+1}{n^3+n} \leq a_n \leq \frac{n^2+n}{n^3+1},$$

$$\frac{n^3+n}{n^3+n} \leq a_n \leq \frac{n^3+n^2}{n^3+1},$$

$$1 \leq a_n \leq \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^3}}.$$

Ponieważ skrajne ciągi dążą do 1, więc także

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Zbadaj zbieżność szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!+1}}{n!}.$$

Rozwiązanie: Korzystamy z kryterium d'Alemberta:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{\sqrt{(n+1)!+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{\sqrt{n!+1}} \\
&= \frac{1}{n+1}\sqrt{\frac{(n+1)!+1}{n!+1}} \\
&= \frac{1}{n+1}\sqrt{\frac{n+1+\frac{1}{n!}}{1+\frac{1}{n!}}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{(n+1)^2}\frac{n+1+\frac{1}{n!}}{1+\frac{1}{n!}}} \\
&= \sqrt{\frac{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)!(n+1)}}{1+\frac{1}{n!}}} \\
&= \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1.
\end{aligned}$$

Szereg jest więc zbieżny.

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Oblicz całkę oznaczoną:

$$\int_1^2 (3x+2)\,\log(x)\,dx.$$

Rozwiązanie: Całkujemy przez części:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 (3x+2)\,\log(x)\,dx &= \int_1^2 \left(\frac{3}{2}x^2+2x\right)'\,\log(x)\,dx \\
&= \left(\frac{3}{2}x^2+2x\right)\,\log(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{3}{2}x^2+2x\right)\frac{1}{x}\,dx \\
&= \left(\frac{3}{2}4+4\right)\,\log(2) - \left(\frac{3}{2}+2\right)\,\log(1) - \int_1^2 \left(\frac{3}{2}x+2\right)dx \\
&= 10\log(2) - \left(\frac{3}{4}x^2+2x\right)\Big|_1^2 \\
&= 10\log(2) - \left(\frac{3}{4}4+4\right) + \left(\frac{3}{4}+2\right) \\
&= 10\log(2) - 7 + \frac{11}{4} \\
&= 10\log(2) - \frac{17}{4}.
\end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Oblicz całkę nieoznaczoną:

$$\int \left(2^x + 3^x\right)^2 dx.$$

Rozwiązanie: Korzystamy z faktu, że

$$\left(a^x\right)' = a^x \log(a) \;\Rightarrow\; \int a^x\, dx = \frac{1}{\log(a)}\, a^x.$$

W takim razie

$$\begin{aligned}\int \left(2^x + 3^x\right)^2 dx &= \int \left(\left(2^x\right)^2 + 2 \cdot 2^x \cdot 3^x + \left(3^x\right)^2\right) dx \\ &= \int \left(4^x + 2 \cdot 6^x + 9^x\right) dx \\ &= \frac{1}{\log(4)}\, 4^x + \frac{2}{\log(6)}\, 6^x + \frac{1}{\log(9)}\, 9^x + C.\end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Oblicz całkę nieoznaczoną:

$$\int \sin\left(\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x^2}.$$

Rozwiązanie: Stosujemy podstawienie:

$$\begin{aligned}
\int \sin\left(\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x^2} &= \left\{\begin{array}{c} t = \frac{1}{x} \\ dt = -\frac{1}{x^2}\,dx \end{array}\right\} \\
&= -\int \sin(t)\,dt \\
&= \cos(t) + C \\
&= \cos\left(\frac{1}{x}\right) + C.
\end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Oblicz pochodną funkcji:

$$f(x) = \log\left(\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}} \cdot \left(\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' \\
&= \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} - (1+x)\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} \\
&= \frac{\sqrt{1+x^2} - (1+x)\,\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{(1+x)\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{1+x^2-(1+x)\,x}{(1+x)\,(1+x^2)} \\
&= \frac{1+x^2-x-x^2}{(1+x)\,(1+x^2)} \\
&= \frac{1-x}{(1+x)\,(1+x^2)}.
\end{aligned}$$

Można też inaczej:

$$f(x) = \log(1+x) - \frac{1}{2}\,\log(1+x^2),$$

a więc

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x^2}\,2x,$$

co, jak łatwo sprawdzić wychodzi na to samo.

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Dla jakich wartości parametrów a, b podana funkcja jest ciągła?

$$f(x) = \begin{cases} a\,x + b & : \quad x < -2 \\ 1 - x^2 & : -2 \le x \le 1\,. \\ -a\,x + b & : \quad 1 < x. \end{cases}$$

Rozwiązanie: Obliczamy granice jednostronne w punktach sklejenia:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2}(ax+b) = -2\,a + b,$$
$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2}(1-x^2) = 1 - 4 = -3,$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1}(1-x^2) = 1 - 1 = 0,$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}(-ax+b) = -a + b.$$

Mamy więc:

$$\begin{cases} -2a + b & = -3, \\ -a + b & = 0, \end{cases}$$

czyli $a = b = 3$.

Nazwisko i imię:

Zadanie 8. Znajdź wartości najmniejszą i największą podanej funkcji w podanym przedziale:

$$f(x) = \sin^4(x) + \cos^4(x), \qquad [0, \pi].$$

Rozwiązanie: Funkcja jest wszędzie różniczkowalna, więc wystarczy porównać wartości na końcach przedziału i w punktach krytycznych $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f(0) &= \sin^4(0) + \cos^4(0) = 1, \\ f(1) &= \sin^4(1) + \cos^4(1) = 1, \\ f'(x) &= 4\sin^3(x)\cos(x) - 4\cos^3(x)\sin(x) \\ &= 4\sin(x)\cos(x)(\sin^2(x) - \cos^2(x)) \\ &= 2\sin(2x)(-\cos(2x)) \\ &= -\sin(4x). \end{aligned}$$

$\sin(t) = 0$ jeżeli $t = k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$. Jeżeli $x \in [0, \pi]$ to $4x \in [0, 4\pi]$. W tym przedziale są 3 punkty tej postaci: $4x = \pi, 2\pi, 3\pi$ (końce przedziału zostały już wzięte pod uwagę). Rozważmy więc $x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \sin^4\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos^4\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \sin^4\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos^4\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 0 = 1, \\ f\left(\frac{3\pi}{4}\right) &= \sin^4\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos^4\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wartość największa to 1 a najmniejsza to $\frac{1}{2}$.

Uwaga: Wiedząc, że $f'(x) = \sin(4x)$ możemy znaleźć zamknięty wzór na f, a następnie wprost odczytać wartości najmniejszą i największą z takiego wzoru.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)\,dx \\ &= \int -\sin(4x)\,dx \\ &= \frac{\cos(4x)}{4} + C. \end{aligned}$$

Stałą C wyznaczamy wiedząc, że $f(0) = 1$

$$1 = \frac{1}{4} + C \;\Rightarrow\; C = \frac{3}{4}.$$

Tak więc

$$f(x) = \frac{\cos(4x)}{4} + \frac{3}{4}.$$

Gdy x przebiega przedział $[0, \pi]$ to $4x$ przebiega przedział $[0, 4\pi]$, czyli dwukrotnie okres funkcji. W okresie cos przyjmuje najmniejszą wartość -1 a największą 1. Najmniejsza wartość funkcji f to w takim razie $\frac{-1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, a największa wartość to $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$.

To samo można więc zrobić inną metodą.