WARSZTATY ZADANIOWE
ZADANIA AUTORSTWA DR WRÓBLEWSKIEGO
LISTOPAD 2009

(1) Uzupełnić cechę podzielności przez 9: Dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k jest podzielna przez 9 wtedy i tylko wtedy, gdy   jest podzielna przez 9.
(2) Uzupełnić uogólnioną cechę podzielności przez 9: Dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k przy dzieleniu przez 9 daje taką samą resztę, jaką przy dzieleniu przez 9 daje   .
(3) Uzupełnić cechę podzielności przez 12: Dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k jest podzielna przez 12 wtedy i tylko wtedy, gdy suma cyfr liczby k , a liczba utworzona przez dwie ostatnie cyfry liczby k .
(4) Czy podana cecha podzielności przez 4 jest poprawna? Jeśli nie, to na czym polega błąd i jak go naprawić? Dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k jest podzielna przez 4 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba utworzona przez trzy ostatnie cyfry liczby k jest podzielna przez 4.
(5) W liczbie 3?20000001?5 wpisać w miejsce obu znaków zapytania taką samą cyfrę tak, aby otrzymać liczbę podzielną przez 75. Podać wszystkie rozwiązania.
(6) W liczbie 3120000001?? wpisać w miejsce znaków zapytania takie cyfry (mogą być różne), aby otrzymać liczbę podzielną przez 72. Podać wszystkie rozwiązania.
(7) Podać, bez wykonywania bezpośrednich obliczeń, trzy ostatnie cyfry liczby 23!.
(8) Która z liczb jest większa
- $10!$ czy 10^{10}?
- $20!$ czy 10^{10}?
- $20!$ czy $(10!)^2$?
- $100!$ czy $(10!)^{10}$?
- $10!$ czy $6! \cdot 7!$?

(9) Niech n będzie liczbą naturalną. Jaką resztę daje
- liczba $7n+8$ przy dzieleniu przez 7?
- liczba $6n+11$ przy dzieleniu przez 3?
- liczba $10n-3$ przy dzieleniu przez 10?
- liczba $10n-23$ przy dzieleniu przez 10?
- liczba $10n-23$ przy dzieleniu przez 10, jeżeli $n = 1$?

(10) Dowieść, że w ciągu 3, 6, 12, 15, 21, 24, 30, 33, 39, ..., w którym każdy kolejny wyraz powstaje z poprzedniego przez dodanie sumy cyfr, nie występuje liczba 2008.
(11) Jakie reszty może dawać kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez 3? Przez 4? Przez 8? Przez 5?
(12) Jakie reszty może dawać sześcian liczby całkowitej przy dzieleniu przez 7? Przez 9?
(13) Dowieść, że liczba naturalna o sumie cyfr równej 47 nie może być ani kwadratem, ani sześcianem liczby całkowitej.
(14) Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne d, dla których prawdziwa jest następująca cecha podzielności przez d:
Dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k jest podzielna przez d wtedy i tylko

wtedy, gdy liczba utworzona przez dwie ostatnie cyfry liczby k jest podzielna przez d.

(15) Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $n^2 - n$ jest parzysta, liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez 6, a liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 30.
Wskazówka: $n^5 - n = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)+$coś.

(16) Wskazać takie liczby naturalne m, n, że

$$m^3 n^4 = 2^{11} \cdot 3^9 \cdot 5^{13}\,.$$

(17) Która liczba jest większa, $2^8 \cdot 18^{10}$ czy 6^{19}?

(18) Obliczyć NWD$(24!, 24^8)$.

(19) Obliczyć NWW$(12^{12}, 18^{18})$.

(20) Niech $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^9$, $b = 2^6 \cdot 3^{11} \cdot 5^5$, $c = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 7^2$. Obliczyć NWD$(a, b, c)$ oraz NWW(a, b, c).

(21) Niech $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 6^9$, $b = 2^6 \cdot 3^{11} \cdot 4^5$, $c = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 10^2$. Obliczyć NWD$(a, b, c)$ oraz NWW(a, b, c).

(22) Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n > 1$, dla których liczba $n^2 - 1$ jest pierwsza.

(23) Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczba $3p + 1$ jest pierwsza.

(24) Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczba $p^2 + 2$ jest pierwsza.

(25) Czy istnieją liczby naturalne m, n spełniające równanie

$$6^m = 12^n\,?$$

(26) Czy istnieją liczby naturalne m, n, k spełniające równanie

$$6^m \cdot 12^n = 18^k\,?$$

(27) Czy istnieją liczby naturalne m, n, k spełniające równanie

$$18^m \cdot 24^n = 12^k\,?$$

(28) Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne d o następującej własności: Dla dowolnych liczb naturalnych m, n, jeżeli iloczyn mn jest podzielny przez 7, to co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez d.

(29) To samo z liczbą 24 zamiast 7.

(30) Uprościć wyrażenie

$$\frac{1}{5 + 2\sqrt{6}} + 2\sqrt{6}\,.$$

(31) Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\sqrt{n^2 + n} - n < \frac{1}{2}\,.$$

(32) Uzupełnić wzory skróconego mnożenia. Kropki występujące po lewej stronie równości zastąpić pojedynczym znakiem.

- $a^3 \ldots b^3 = (a + b) \cdot \ldots$
- $a^3 \ldots b^3 = (a - b) \cdot \ldots$
- $a^4 \ldots b^4 = (a + b) \cdot \ldots$
- $a^4 \ldots b^4 = (a - b) \cdot \ldots$

(33) Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\sqrt[3]{n^3 + n^2} < n + \frac{112233}{336698}\,.$$

$$\sqrt[3]{n^3 + n^2} < n + \frac{112233}{336698}\,.$$

(34) Które z wielomianów $x^{30}-1$, $x^{30}+1$, $x^{60}-1$, $x^{60}+1$ są podzielne przez wielomian
- x^5+1,
- x^5-1,
- x^6+1,
- x^6-1?

(35) Uporządkować rosnąco następujące liczby:

$$\binom{100}{7},\quad \binom{100}{27},\quad \binom{100}{47},\quad \binom{100}{57},\quad \binom{100}{77},\quad \binom{100}{97}.$$

(36) Rozwiązać równanie

$$3\cdot\binom{n}{4}=\binom{k}{2}$$

w liczbach naturalnych $n\geq 4$, $k\geq 2$.

(37) Wskazać taką liczbę x, że dla dowolnych liczb naturalnych n i k prawdziwa jest równość

$$\binom{n}{k}+x\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k+2}=\binom{n+2}{k+2}.$$

(38) Dowieść, że dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych a,b,c zachodzi równość

$$\binom{a+b+c}{a}\binom{b+c}{b}=\binom{a+b+c}{b}\binom{a+c}{a}.$$

(39) Obliczyć sumę

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}.$$

(40) Obliczyć sumę

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\binom{n}{6}+\ldots$$

(41) Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n\geq 2$ zachodzi nierówność

$$\binom{2n}{n}<4^n\,.$$

(42) Uprościć wyrażenie

$$\sqrt{n-40\sqrt{n}+400}\,.$$

(43) Rozwiązać równanie

$$|x-5|+|x+7|=12\,.$$

(44) Która z liczb jest większa
- $\dfrac{8^{444}}{17^{17}}$ czy $\dfrac{16^{333}}{19^{17}}$?
- $\dfrac{17^{667}}{3333^4+6666^4}$ czy $\dfrac{17^{666}}{3333^4}$?

(45) Podać co najmniej trzy przykłady par takich liczb wymiernych dodatnich $a<b$, że $a^b=b^a$.

(46) Uprościć wyrażenie

$$\left(3^{2^n}-2^{2^k}\right)\cdot\left(3^{2^n}+2^{2^k}\right)\cdot\left(3^{2^{n+1}}+2^{2^{k+1}}\right)\,.$$

(47) Niech $a = \sqrt[4]{2}$. Która z liczb jest większa

$$a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{16}}}}}}}}}}}}}}}} \qquad \text{czy} \qquad 10^{10^{10}}\ ?$$

(48) Uprościć wyrażenia:

- $4^{2+\log_2 7}$
- $\log_{\sqrt{3}} 2 \cdot \log_5 9$
- $\log_6 2 + \log_{36} 9$

(49) Uprościć podane wyrażenia podając wynik w postaci liczby całkowitej:

- $\log_6 12 + 3 \cdot \log_6 18 + \log_6 24$
- $2 \cdot \log_6 12 + 4 \cdot \log_6 18 + \log_6 24$
- $\log_6 12 + 5 \cdot \log_6 18 + 2 \cdot \log_6 24$
- $3 \cdot \log_6 12 + 5 \cdot \log_6 18 + \log_6 24$

(50) Czy podane liczby tworzą (w podanej kolejności) postęp arytmetyczny trójwyrazowy

- $\log_7 1$, $\log_7 3$, $\log_7 5$
- $\log_7 1$, $\log_7 4$, $\log_7 16$
- $\log_7 4$, $\log_7 6$, $\log_7 9$
- $\log_7 25$, $\log_7 10$, $\log_7 4$

(51) Bez użycia kalkulatora rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

- $\log_2 7$ czy $\log_3 7$
- $\log_{0,2} 7$ czy $\log_{0,3} 7$
- $\log_2 7$ czy $\log_{0,3} 7$
- $\log_{0,2} 7$ czy $\log_3 7$
- $\log_2 0,7$ czy $\log_3 0,7$
- $\log_{0,2} 0,7$ czy $\log_{0,3} 0,7$
- $\log_2 0,7$ czy $\log_{0,3} 0,7$
- $\log_{0,2} 0,7$ czy $\log_3 0,7$
- $\log_9 27$ czy $\log_4 8$
- $\log_3 8$ czy $\log_2 5$
- $\log_5 127$ czy $\log_{10} 999$
- $\log_3 100$ czy $\log_2 10$
- $(\log_2 3) \cdot \log_5 7$ czy $(\log_2 7) \cdot \log_5 3$
- $(\log_2 3) \cdot \log_7 5$ czy $(\log_7 9) \cdot \log_{16} 25$
- $\log_2 3$ czy $\log_3 5$
- $\log_3 7$ czy $\log_5 19$
- $\log_2 3$ czy $\log_5 13$
- $\log_3 5$ czy $\log_{15} 56$
- $(\log_3 15) + \log_5 15$ czy $(\log_3 15) \cdot \log_5 15$
- $(\log_7 123456789)^{\log_7 123456789}$ czy $123456789^{\log_7 \log_7 123456789}$
- $\log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} 2$ czy $(\log_{666} 665) + \log_{666} 667$
- $\log_2 3$ czy $1,6$
- $\log_2 45$ czy $72/13$
- $2^{\log_3 7}$ czy $7^{\log_3 2}$

(52) Dla ilu trójek liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c różnych od 1 spełniona jest podana równość? Dla wszystkich? Dla żadnej? Dla niektórych (podać 3 przykłady, a jeśli przykładów jest mniej niż 3, podać wszystkie)?
- $\log_a(bc) = (\log_a b) + \log_a c$
- $\log_a(bc) = (\log_a b) \cdot \log_a c$
- $\log_a(b+c) = (\log_a b) \cdot \log_a c$
- $\log_a(b+c) = (\log_a b) + \log_a c$
- $(\log_a b) \cdot \log_b c = \log_a c$
- $\log_a(b^c) = c \cdot \log_a b$
- $\log_a(b^c) = (\log_a b)^c$

(53) Dla podanych liczb a, b wskazać taką liczbę c, że liczby $\log_a 37$, $\log_b 37$, $\log_c 37$ tworzą (w tej właśnie kolejności) postęp arytmetyczny trójwyrazowy.
- $a = 64$, $b = 8$
- $a = 4$, $b = 8$
- $a = 2$, $b = 8$
- $a = 64$, $b = 16$

(54) Obliczyć podając wynik w postaci ułamka zwykłego
- $\sqrt{0,(4)} + \sqrt[3]{3,374(9)}$
- $(0,2(9) + 1,(09)) \cdot 12,(2)$
- $(0,(037))^{0,(3)}$

(55) Dowieść, że podane liczby są niewymierne
- $\sqrt{2}$
- $\sqrt[m]{n}$, jeżeli n jest liczbą naturalną niebędącą m-tą potęgą liczby naturalnej
- $\sqrt{5} + \sqrt{7}$
- $\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$
- $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$
- $\log_m n$, jeżeli liczby naturalne $m, n > 1$ nie są potęgami tej samej liczby naturalnej

(56) Rozstrzygnąć, czy liczba $\log_2 3 + \log_4 5$ jest wymierna czy niewymierna.

(57) Liczby a i b są dodatnie i niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a + b$ jest niewymierna?

(58) Czy liczba $\log_{(\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2}+1)$ jest wymierna czy niewymierna?

(59) Dowieść, że suma liczby wymiernej i liczby niewymiernej jest liczbą niewymierną.

(60) Czy iloczyn liczby wymiernej i liczby niewymiernej jest zawsze liczbą niewymierną?

(61) Liczby $a + b$, $b + c$ i $c + a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c są wymierne?

(62) Liczby $a+b$, $b+c$ i $c+a$ są niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a + b + c$ jest niewymierna?

(63) Liczby $a + b$, $b + c$, $c + d$ i $d + a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c, d są wymierne?

(64) Liczby $a+b$, $b+c$, $c+d$ i $d+e$, $e+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c, d, e są wymierne?

(65) Niech n będzie liczbą naturalną. Mając do dyspozycji nawiasy, n, liczby całkowite oraz znaki $+, -, \cdot, :$ i $\sqrt{}$ zapisać liczbę niewymierną dodatnią mniejszą od $\frac{1}{n}$.

(66) Suma wyrazów rosnącego postępu arytmetycznego 2007-wyrazowego o wyrazach dodatnich jest liczbą wymierną. Czy stąd wynika, że co najmniej jeden wyraz postępu jest liczbą wymierną?

(67) To samo pytanie dla postępu 2008-wyrazowego.

(68) Wszystkie poniższe przykłady można podać bez używania operacji bardziej skomplikowanych niż logarytmy i pierwiastki, korzystając tylko z faktu niewymierności liczb o postaci rozważanej we wcześniejszych zadaniach. Podać przykład takiej liczby rzeczywistej x, że

- $0 < x < 1$ oraz liczba x jest niewymierna,
- $\sqrt{5} < x < \sqrt{6}$ oraz liczba x jest wymierna,
- liczby x^2 i x^3 są niewymierne, ale liczba x^5 jest wymierna,
- liczby x^4 i x^6 są wymierne, ale liczba x^5 jest niewymierna,
- liczba $(x+1)^2$ jest niewymierna,
- liczba x jest niewymierna, ale liczba $x + \dfrac{1}{x}$ jest wymierna,
- liczba x jest niewymierna i liczba 2^x jest niewymierna,
- $2^x + 3^x$ jest liczbą niewymierną,
- $2^x + 3^x$ jest liczbą wymierną,
- $\log_2 x + \log_3 x$ jest liczbą niewymierną,
- $\log_2 x + \log_3 x$ jest liczbą wymierną,
- $\log_2 x \cdot \log_3 x$ jest liczbą niewymierną,
- $\log_2 x \cdot \log_3 x$ jest liczbą wymierną,
- $2^x + \log_2 x$ jest liczbą całkowitą dodatnią,
- $2^x + \log_2 x$ jest liczbą niewymierną,
- $x + \log_2 x$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,
- $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,
- $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą niewymierną,
- $\log_x(1+x)$ jest liczbą wymierną,
- $\log_x(1+x)$ jest liczbą niewymierną.

(69) Funkcja jest

- okresowa
- parzysta
- nieparzysta

wtedy i tylko wtedy, gdy jej wykres jest niezmienniczy ze względu na ....

(70) Czy funkcja f zdefiniowana podanym wzorem jest parzysta? Nieparzysta? Monotoniczna?

- $f(x) = 0$
- $f(x) = 37$
- $f(x) = 2x$
- $f(x) = 2x^2 + 1$
- $f(x) = 14x^5 + 6x^3$
- $f(x) = 14x^6 + 6x^4$
- $f(x) = x^6 + x^5$

(71) Niech

$$f(x) = \left| \left[x + \frac{1}{2} \right] - x \right| ,$$

gdzie [.] oznacza część całkowitą liczby rzeczywistej. Naszkicować wykres funkcji f oraz wykresy następujących funkcji

- $f_1(x) = f(2x)$
- $f_2(x) = f(x/2)$
- $f_3(x) = 2f(x)$

- $f_4(x) = f\left(x + \frac{1}{4}\right)$
- $f_5(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$
- $f_6(x) = f\left(x - \frac{1}{2}\right)$
- $f_7(x) = \frac{1}{2} - f\left(x\right)$
- $f_8(x) = f\left(\left|x - \frac{1}{4}\right|\right)$
- $f_9(x) = \left|f\left(x - \frac{1}{4}\right)\right|$
- $f_{10}(x) = \frac{f(2x)}{2}$
- $f_{11}(x) = f(x) + x$
- $f_{12}(x) = 5f(x) + 3x$

(72) Naszkicować wykres funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem

- $f(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$
- $f(x) = \frac{x}{x-1}$
- $f(x) = 2 + \frac{1}{x+3}$
- $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$
- $f(x) = 1 - \frac{1}{|x|}$
- $f(x) = 1 - \frac{1}{x-2}$
- $f(x) = 1 - \frac{1}{|x|-2}$
- $f(x) = 1 - \frac{1}{|x-2|}$
- $f(x) = \left|1 - \frac{1}{x-2}\right|$
- $f(x) = \left|1 - \frac{1}{|x|-2}\right|$
- $f(x) = \left|1 - \frac{1}{|x-2|}\right|$

(73) Funkcja f spełnia warunki

$$f(3-x) = f(x), \qquad f(6-x) = f(x)$$

dla dowolnej liczby rzeczywistej x. Dowieść, że funkcja f jest okresowa i parzysta.

(74) Dla każdej z liczb $i \in \{1, 2, \ldots, 13\}$ wskazać taką liczbę $j \in \{1, 2, \ldots, 13\}$, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x

$$f_j(f_i(x)) = x\,.$$

- $f_1(x) = 37 + x$
- $f_2(x) = 37 - x$
- $f_3(x) = x - 37$

- $f_4(x) = 3x - 2$
- $f_5(x) = 3x - 4$
- $f_6(x) = 3x - 6$
- $f_7(x) = \dfrac{x}{3} + 2$
- $f_8(x) = \dfrac{x}{3} + \dfrac{2}{3}$
- $f_9(x) = \dfrac{x}{3} + \dfrac{4}{3}$
- $f_{10}(x) = -\dfrac{5}{4}x + \dfrac{3}{4}|x|$
- $f_{11}(x) = -\dfrac{5}{4}x - \dfrac{3}{4}|x|$
- $f_{12}(x) = \dfrac{5}{4}x + \dfrac{3}{4}|x|$
- $f_{13}(x) = \dfrac{5}{4}x - \dfrac{3}{4}|x|$

(75) Podać zbiór wartości funkcji f danej wzorem $f(x) = x^2$ na przedziale
- $[1,\ 4)$
- $[-2,\ -1)$
- $(-3,\ 2)$

(76) Podać zbiór wartości funkcji f danej wzorem $f(x) = |2^x - 8|$ na przedziale
- $(0,\ 1)$
- $(2,\ 4]$
- $\left(-\infty,\ 3\frac{1}{2}\right]$

(77) Podać zbiór wartości funkcji f danej wzorem $f(x) = x^4 - 50x^2$ na przedziale
- $(-10,\ -6)$
- $(-7,\ -1)$
- $(-6,\ 1)$
- $(-1,\ 7)$
- $(3,\ 10)$

(78) Rozwiązać równania i nierówności
- $x^2 - 103x + 300 = 0$
- $3x < \sqrt{x^2 + 8}$
- $\sqrt{x^7 + x + 7} = 3$
- $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$
- $(x^2 + x + 1)^{3x} > (x^2 + x + 1)^{x+1}$
- $\log_{2x}(x^2 + 1) \le \log_{2x}(x^2 + 3x)$
- $\log_2 x + \log_x 4 < 3$
- $||||||x| - 1| - 1| - 1| - 1| - 1| = \dfrac{x}{2}$
- $\left|x^2 - 17\right| = 8$
- $|x - 1| + |x| + |x + 1| > x^2 + \dfrac{20}{9}$

(79) W trapezie o wysokości 12 ramiona mają długości 15 i 20, a jedna z podstaw ma długość 50. Jaka jest długość drugiej podstawy?

(80) Uporządkować niemalejąco następujące liczby: $\sin 18°$, $\sin 36°$, $\sin 72°$, $\sin 144°$, $\cos 18°$, $\cos 36°$, $\cos 72°$, $\cos 144°$.

(81) Niech $0 < a \le b \le c$. Dokończyć i uzasadnić:

- Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt wtedy i tylko wtedy, gdy ...
- Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt prostokątny wtedy i tylko wtedy, gdy ...
- Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkątt rozwartokątny wtedy i tylko wtedy, gdy ...
- Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt ostrokątny wtedy i tylko wtedy, gdy ...
- Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt o jednym z kątów mającym miarę $120°$ wtedy i tylko wtedy, gdy ...
- Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt o jednym z kątów mającym miarę $60°$ wtedy i tylko wtedy, gdy ...

(82) W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A ma miarę $30°$, a boki AC i BC mają długości odpowiednio $\sqrt{3}$ oraz 1. Wyznaczyć długość boku AB.

(83) Środek okręgu opisanego na trójkącie leży na prostej przechodzącej przez jeden z jego wierzchołków i środek przeciwległego boku wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt jest ...

(84) Mając narysowany okrąg i jego środek, skonstruować kąt prosty przy użyciu samej linijki.

(85) Punkt O jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Wiadomo, że

$$\angle AOB = \angle ACB + 60° .$$

Wyznaczyć miarę kąta ACB .

(86) To samo pytanie, gdy O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC.

(87) Poniższe warunki dotyczą czworokąta wypukłego. Połączyć je w pary warunków równoważnych.
- w czworokąt można wpisać okrąg
- na czworokącie można opisać okrąg
- czworokąt jest równoległobokiem
- czworokąt jest rombem
- czworokąt jest prostokątem
- sumy miar przeciwległych kątów są równe
- sumy długości przeciwległych boków są równe
- sumy kwadratów długości przeciwległych boków są równe
- przekątne są równej długości i dzielą się na połowy
- przekątne są prostopadłe i dzielą się na połowy
- przekątne są prostopadłe
- przekątne dzielą się na połowy

(88) Czy istnieje czworokąt, którego boki mają długości (w podanej kolejności)
- 1, 3, 10, 15
- 2, 4, 10, 15
- 3, 27, 10, 15
- 4, 30, 10, 15

(89) Wyznaczyć położenie punktów styczności okręgu wpisanego w trójkąt o bokach 3, 4, 5 do boków tego trójkąta.

(90) Trzy kolejne boki wielokąta opisanego na okręgu mają długości a, b, c (z zachowaniem kolejności). Jaki warunek muszą spełniać a, b, c, aby było to możliwe?

(91) Na okręgu opisano pięciokąt o bokach 3, 4, 5, 6, 7 (w tej kolejności). Wyznaczyć położenie punktów styczności okręgu do boków pięciokąta.

(92) Pięć kolejnych boków wielokąta opisanego na okręgu ma długości a, b, c, d, e (z zachowaniem kolejności). Wykazać, że wówczas

$$b + d < a + c + e\ .$$

(93) Wykazać, że dla sześciokąta o bokach a, b, c, d, e, f (z zachowaniem kolejności) równość

$$a + c + e = b + d + f$$

jest warunkiem (koniecznym/dostatecznym) (niepotrzebne skreślić) na to, aby w sześciokąt można było wpisać okrąg. Pokazać na przykładzie, że nie jest to warunek (konieczny/dostateczny).

(94) Podać 4 przykłady parami niepodobnych trójkątów równoramiennych, z których każdy można podzielić na dwa trójkąty równoramienne.

(95) Dla których liczb naturalnych $n \geq 3$ poniższe zdanie jest prawdziwe

- Dowolny n-kąt wpisany w okrąg i mający wszystkie boki równej długości jest foremny.
- Dowolny n-kąt wpisany w okrąg i mający wszystkie kąty równej miary jest foremny.
- Dowolny n-kąt opisany na okręgu i mający wszystkie boki równej długości jest foremny.
- Dowolny n-kąt opisany na okręgu i mający wszystkie kąty równej miary jest foremny.

(96) Na płaszczyźnie dany jest trójkąt ABC. Ile co najwyżej może istnieć takich punktów D różnych od C, że proste AB i CD są prostopadłe, a przy tym

$$\angle ACB = \angle ADB\,?$$

(97) Dla której liczby naturalnej n w dowolnym n-kącie wypukłym liczba przekątnych jest k razy większa od liczby boków, jeżeli

- $k = 2$
- $k = 3$
- $k = 5$
- $k = 10$

(98) Dla których liczb naturalnych n istnieje n-kąt wypukły, którego każdy kąt wewnętrzny ma miarę 60° lub 160°?

(99) Dziewięciokąt $A_1A_2A_3 \ldots A_9$ jest foremny. Wyznaczyć miary kątów trójkąta

- $A_1A_3A_7$
- $A_2A_3A_8$
- $A_3A_4A_5$

(100) Dany jest dwunastokąt foremny $A_1A_2A_3 \ldots A_{12}$. Dla podanych dwóch przekątnych wskazać trzecią przekątną przechodzącą przez ich punkt przecięcia.

- A_1A_7, A_3A_9
- A_1A_5, A_2A_8
- A_1A_5, A_3A_7
- A_1A_6, A_4A_9

(101) Dany jest jedenastokąt foremny $A_1A_2A_3 \ldots A_{11}$. Połączyć podane czworokąty w pary czworokątów przystających

- $A_1A_2A_4A_9$
- $A_1A_3A_7A_{11}$
- $A_1A_4A_{10}A_{11}$
- $A_1A_6A_9A_{10}$

- $A_1A_4A_6A_{11}$
- $A_1A_2A_3A_9$
- $A_1A_6A_8A_{11}$
- $A_1A_3A_4A_8$
- Które czworokąty mają równe pola?

(102) Dany jest 13-kąt foremny $A_1A_2A_3\dots A_{13}$. Dla podanych i, j wskazać taką liczbę k, że trójkąt $A_iA_jA_k$ jest trójkątem równoramiennym ostrokątnym
- $i = 1$, $j = 2$
- $i = 1$, $j = 5$
- $i = 1$, $j = 6$
- $i = 1$, $j = 7$

(103) Który punkt wewnątrz trójkąta równobocznego ma najmniejszą sumę odległości od jego boków?

(104) Który punkt wewnątrz trójkąta równobocznego ma najmniejszą sumę odległości od jego wierzchołków?

(105) Który punkt wewnątrz kwadratu ma najmniejszą sumę odległości od jego boków?

(106) Który punkt wewnątrz kwadratu ma najmniejszą sumę odległości od jego wierzchołków?

(107) W wierzchołkach kwadratu o boku 1 km znajdują się 4 domy. Czy można zbudować sieć dróg o łącznej długości mniejszej od $2\sqrt{2}$ km, umożliwiającą dojście z każdego domu do każdego innego?

(108) Obliczyć pole sześciokąta formenego o boku 1.

(109) Obliczyć pole dwunastokąta formenego o boku 1.

(110) W 101-kącie foremnym pomalowano na czerwono dowolne 52 wierzchołki. Dowieść, że istnieje trójkąt równoramienny, którego wszystkie wierzchołki są czerwone.