Kolokwium 3
8.01.10

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Oblicz pochodną funkcji:

$$f(x) = x^{(x^2)}, \quad x > 0.$$

Rozwiązanie: Stosujemy zwykły trik:

$$f(x) = e^{\log x^{x^2}} = e^{x^2 \log x}.$$

Mamy więc

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x^2 \log x} \cdot \left(x^2 \log x\right)' \\ &= x^{x^2} \left(2x \log x + x^2 \frac{1}{x}\right) \\ &= x^{x^2} \left(2x \log x + x\right). \end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Oblicz pochodną funkcji:

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{1+x^2}+2}.$$

Rozwiązanie: Reguła łańcuchowa:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{1+x^2}+2}} \cdot \left(\sqrt{1+x^2}+2\right)' \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{1+x^2}+2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1+x^2\right)' \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{1+x^2}+2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x \\
&= \frac{x}{2\sqrt{\sqrt{1+x^2}+2} \cdot \sqrt{1+x^2}}.
\end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji:

$$f(x) = |\cos(x)| + \frac{x}{2}.$$

na przedziale $[0, \pi]$.

Rozwiązanie: Funkcja jest różniczkowalna we wszystkich punktach przedziału $(0, \pi)$ z wyjątkiem $\frac{\pi}{2}$, gdzie $\cos x = 0$. Mamy więc do rozpatrzenia punkty: 0, π (końce) i $\frac{\pi}{2}$ (nieróżniczkowalność). Znajdźmy punkty w których pochodna jest zerem. Dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ cosinus jest dodatni, więc

$$f(x) = \cos(x) + \frac{x}{2} \Rightarrow f'(x) = -\sin(x) + \frac{1}{2}.$$

Widać więc, że $f'(x) = 0$ dla $x = \frac{\pi}{6}$. To jest kolejny punkt podejrzany. W końcu, dla $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ mamy $\cos(x) < 0$, więc

$$f(x) = -\cos(x) + \frac{x}{2} \Rightarrow f'(x) = \sin(x) + \frac{1}{2}.$$

Na przedziale $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ sinus jest dodatni, więc f' nie ma miejsc zerowych. Obliczamy więc wartości funkcji f w następujących „podejrzanych"punktach

$$f(0) = 1, \quad f(\pi) = 1 + \frac{\pi}{2} \simeq 2,57, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \simeq 0,7854, \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12} \simeq 1,1278.$$

Widać więc, że wartość najmniejsza to $\frac{\pi}{4}$ (przyjęta w $\frac{\pi}{2}$), a wartość największa to $1 + \frac{\pi}{2}$ (przyjęta w π).

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Oblicz granicę:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(2x))}{\log(\cos(x))}.$$

Rozwiązanie: Jest to wyrażenie nieoznaczone typu $\frac{0}{0}$ w 0, więc możemy zastosować regułę de l'Hôpitala:

$$\frac{\log(\cos(2x))'}{\log(\cos(x))'} = \frac{\frac{1}{\cos(2x)} \cdot (-\sin(2x)) \cdot 2}{\frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x))} = \frac{2 \cdot \sin(2x) \cdot \cos(x)}{\sin(x) \cdot \cos(2x)}.$$

Możemy zastosować regułę de l'Hôpitala ponownie, ale możemy też skorzystać z tożsamości trygonometrycznej:

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x).$$

Mamy więc:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(2x))}{\log(\cos(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(2x))'}{\log(\cos(x))'} = \lim_{x\to 0} \frac{4\cos^4(x)}{\cos(2x)} = 4.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Wypisz 4 pierwsze wyrazy (stopnia 0, 1, 2 i 3) szeregu Taylora funkcji

$$f(x) = \tan(x)$$

w otoczeniu punktu $a = 0$:

Rozwiązanie: Musimy policzyć 3 kolejne pochodne tangensa, i podstawić do wzoru.

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}, \quad f''(x) = -2\frac{1}{\cos^3(x)} \cdot (-\sin(x)) = \frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)},$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \frac{2\cos(x)\cos^3(x) - 2\sin(x)3\cos^2(x)(-\sin(x))}{\cos^6(x)} \\ &= \frac{2\cos^2(x) + 6\sin^2(x)}{\cos^4(x)} = \frac{2 + 4\sin^2(x)}{\cos^4(x)}. \end{aligned}$$

Mamy więc:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 2.$$

Początek szeregu Taylora wygląda więc następująco

$$f(x) \simeq x + \frac{2x^3}{6} = x + \frac{x^3}{3}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Oblicz całkę:

$$\int (x^2+1)\, e^{2x}\, dx.$$

Rozwiązanie: Całkujemy przez części dwukrotnie:

$$\begin{aligned}
\int (x^2+1)\, e^{2x}\, dx &= \int (x^2+1) \left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' dx \\
&= \frac{(x^2+1)e^{2x}}{2} - \int 2x\, \frac{e^{2x}}{2}\, dx \\
&= \frac{(x^2+1)e^{2x}}{2} - \int x \left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' dx \\
&= \frac{(x^2+1)e^{2x}}{2} - \frac{xe^{2x}}{2} + \int \frac{e^{2x}}{2}\, dx \\
&= \frac{(x^2+1)e^{2x}}{2} - \frac{xe^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4}
\end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Oblicz całkę:

$$\int x\, e^{-x^2}\, dx.$$

Rozwiązanie: Całkujemy przez podstawienie

$$\begin{aligned}
\int x\, e^{-x^2}\, dx &= -\frac{1}{2}\int (-2x)\, e^{-x^2}\, dx \\
&= \left\{ \begin{array}{c} y = -x^2 \\ \frac{dy}{dx} = -2x \end{array} \right\} \\
&= -\frac{1}{2}\int e^y\, dy \\
&= -\frac{1}{2}\, e^y \\
&= -\frac{1}{2}\, e^{-x^2}.
\end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 8. Oblicz całkę:

$$\int \frac{x^4}{x^2-1}\,dx.$$

Rozwiązanie: Mamy

$$x^4 = x^4 - x^2 + x^2 - 1 + 1,$$

czyli

$$\frac{x^4}{x^2-1} = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2-1}.$$

Rozkładamy na ułamki proste

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)x + (A-B)}{x^2-1}.$$

Wynika stąd, że

$$A + B = 0, \quad A - B = 1,$$

czyli $A = \frac{1}{2}$ i $B = -\frac{1}{2}$. Ostatecznie więc

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4}{x^2-1}\,dx &= \int \left(x^2 + 1 + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1}\right)dx \\ &= \frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{2}\log|x+1| \\ &= \frac{x^3}{3} + x + \log\sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}.\end{aligned}$$