Kolokwium 1
6.11.09

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Funkcja f dana jest wzorem

$$f(x) = \frac{2\,x+3}{x-1}, \qquad D_f = \{x : x \neq 1\}.$$

Podaj wzór na funkcję odwrotną do f i podaj jej dziedzinę.

Rozwiązanie: Rozwiązujemy ze względu na x równanie

$$y = \frac{2\,x+3}{x-1},$$

i otrzymujemy

$$xy - y = 2x + 3 \quad \Rightarrow \quad xy - 2x = y + 3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y+3}{y-2}.$$

Funkcja odwrotna ma więc postać $f^{-1}(y) = \frac{y+3}{y-2}$, i jej dziedziną jest zbiór $\{y \neq 2\}$. Łatwo sprawdzić, że liczba 2 nie należy do obrazu f, więc nie należy do dziedziny funkcji odwrotnej.

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Funkcja f dana jest wzorem

$$f(x) = \frac{1}{x-1}, \qquad D_f = \{x \neq 1\}.$$

Podaj wzór na złożenie $(f \circ f)$, i podaj naturalną dziedzinę złożenia $D_{(f \circ f)}$.

Rozwiązanie: Dziedziną złożenia będą te punkty D_f, które funkcja f przekształca na punkty D_f. Wyjątkiem jest więc taka liczba x, że $f(x) = \frac{1}{x-1} = 1$. Rozwiązując, dostajemy $x = 2$. Dziedzina złożenia jest więc równa $D_{(f \circ f)} = \{x \neq 1, x \neq 2\}$. Wzór na funkcję złożoną otrzymujemy podstawiając

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{1}{f(x)-1} = \frac{1}{\frac{1}{x-1} - 1} = \frac{x-1}{1-(x-1)} = \frac{x-1}{2-x}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Wykonaj następujące działanie, i przedstaw wynik w postaci $a + b\,i$:

$$\frac{2-i}{3+2\,i}.$$

Rozwiązanie: Mnożymy i dzielimy przez sprzężoną, i piszemy

$$\frac{2-i}{3+2\,i} = \frac{(2-i)(3-2\,i)}{(3+2\,i)(3-2\,i)} = \frac{(6-2)-(4+3)\,i}{9+4} = \frac{4-7\,i}{13} = \frac{4}{13} - \frac{7}{13}\,i.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Rozwiąż następującą nierówność:

$$|x-1|+|2x-5|<9.$$

Rozwiązanie: Punkty szczególne tej nierówności to 1 i 2,5. Niech więc $x \leq 1$. Wtedy nierówność przyjmuje postać

$$1-x+5-2x<9 \quad \Leftrightarrow \quad -3<3x \quad \Leftrightarrow \quad -1<x.$$

Do zbioru rozwiązań należy więc przedział $(-1,1]$. Niech teraz $1<x\leq\frac{5}{2}$. Nierówność przyjmuje postać

$$x-1+5-2x<9 \quad \Leftrightarrow \quad -5<x,$$

którą spełniają wszystkie x z rozpatrywanego przedziału. Cały przedział $(1,\frac{5}{2}]$ należy więc do zbioru rozwiązań. Rozpatrzmy ostatni przypadek, $x>\frac{5}{2}$. Wtedy nierówność ma postać

$$x-1+2x-5<9 \quad \Leftrightarrow \quad 3x<15 \quad \Leftrightarrow \quad x<5.$$

Do zbioru rozwiązań należy więc dodać przedział $(\frac{5}{2},5)$. Składając te trzy przypadki, otrzymujemy ostatecznie cały zbiór rozwiązań: przedział $(-1,5)$.

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Pokaż, że następujący ciąg jest rosnący i ograniczony:

$$a_n = \frac{2n^2 + n - 1}{2n^2 + n + 3}.$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że

$$a_n = 1 - \frac{4}{2n^2 + n + 3}.$$

Mianownik ułamka po prawej stronie, jak łatwo zauważyć, rośnie, więc ułamek maleje, a ponieważ odejmujemy go, więc ostatecznie ciąg $\{a_n\}$ rośnie. Od razu też widać, że $a_n < 1$, gdyż ułamek jest dodatni. Ograniczenie od dołu jest automatyczne dla ciągów rosnących.

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Znajdź granicę ciągu

$$a_n = \sqrt{n^2 + \sqrt{n}} - \sqrt{n^2 + 3}.$$

Rozwiązanie: Stosujemy zwykłą procedurę, mnożymy i dzielimy przez sumę pierwiastków:

$$a_n = \frac{n^2 + \sqrt{n} - n^2 - 3}{\sqrt{n^2 + \sqrt{n}} + \sqrt{n^2 + 3}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{3}{n}}{\sqrt{1 + n^{-3/2}} + \sqrt{1 + 3n^{-2}}} \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Podzieliliśmy licznik i mianownik przez n, a następnie zauważyliśmy, że licznik dąży do 0, a mianownik do 2.

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Znajdź granicę ciągu

$$a_n = \frac{n\,\sin(n!)}{n^2+1}.$$

Rozwiązanie: Korzystamy z twierdzenia o 3 ciągach, i z tego, że funkcja $\sin(x)$ ma wartości pomiędzy -1 i 1. Mamy więc

$$-\frac{n}{n^2+1} \leq \frac{n\,\sin(n!)}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1}$$
$$-\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} \leq \frac{n\,\sin(n!)}{n^2+1} \leq \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}.$$

Skrajne ciągi dążą do 0, a więc ciąg pomiędzy nimi też dąży do 0.

Nazwisko i imię:

Zadanie 8. Znajdź granicę ciągu

$$a_n = \frac{2(\sqrt{n})^3 - (\sqrt[3]{n}\,\sqrt[6]{n})^3\sqrt{4n-2}}{2n^2+4n-2}.$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że

$$(\sqrt[3]{n}\,\sqrt[6]{n})^3 = (n^{1/3}\,n^{1/6})^3 = n^{3/2}.$$

Najwyższa potęga n w liczniku wynosi więc 2, podobnie jak w mianowniku. Podzielmy więc licznik i mianownik przez n^2:

$$\frac{2(\sqrt{n})^3 - (\sqrt[3]{n}\,\sqrt[6]{n})^3\sqrt{4n-2}}{2n^2+4n-2} = \frac{2n^{3/2} - n^{3/2}\sqrt{4n-2}}{2n^2+4n-2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{n}} - \sqrt{4-\frac{2}{n}}}{2+\frac{4}{n}-\frac{2}{n^2}}.$$

Widzimy więc, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{\sqrt{n}} - \sqrt{4-\frac{2}{n}}}{2+\frac{4}{n}-\frac{2}{n^2}} = -\frac{\sqrt{4}}{2} = -1.$$