

ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 7

13.11.08

- (1) Naskicuj wykres funkcji $f(x)$ danej wzorem ($[\dots]$ oznacza część całkowitą, a $\{\dots\}$ oznacza część ułamkową):

$$(a) f(x) = |x^2 - 1| - |x^2 - 4|, \quad (b) f(x) = |x^2 - 8x + 15|,$$

$$(c) f(x) = x^2 + x + 2 - |x^2 - x - 2|, \quad (d) f(x) = \{\cos x\},$$

$$(e) f(x) = [\frac{4}{\pi} \arctan x], \quad (f) f(x) = 2\{\sin x\} - \{2 \sin x\}.$$

- (2) Rozwiąż następujące równania i nierówności:

$$(a) \sin x \geq \frac{1}{2}, \quad (b) |\cos x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$(c) [\sin x] = 0, \quad (d) \{\cos x\} = \frac{1}{2},$$

$$(e) \{\frac{4}{\pi} \arctan x\} = 0, \quad (f) \{\frac{3}{\pi} \arctan x\} \leq \frac{1}{2},$$

$$(g) (x^2 - 4) \cdot \cos x \geq 0, \quad (h) (\frac{3}{2} + \sin x)^{\sin x} = 1.$$

- (3) Oblicz granice:

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log x}{1 + \log x},$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2^{1/x} + 1}{2^{-1/x} - 1}, \quad (e) \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2^{1/x} + 1}{2^{-1/x} - 1}, \quad (f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{1/x} - 1}{2^{-1/x} + 1}.$$

- (4) Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x)$, oraz sprawdź, w których punktach funkcja jest ciągła a w których nieciągła ($\operatorname{sgn} x$ to znak x : dla $x > 0$ $\operatorname{sgn} x = 1$, dla $x < 0$ $\operatorname{sgn} x = -1$, a dla $x = 0$ $\operatorname{sgn} x = 0$):

$$(a) f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x), \quad (b) f(x) = \{x\} - (\{x\})^2,$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ x & : 0 \leq x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & : 1 \leq x < 3 \\ 4 - x & : x \geq 3, \end{cases}$$

$$(d) \quad f(x) = \begin{cases} x & : \quad x \neq 2 \\ \operatorname{sgn} x & : \quad x = 2, \end{cases}$$

$$(e) \quad f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}, \quad (f) \quad f(x) = \operatorname{sgn}(x^3 - x),$$

$$(g) \quad f(x) = [x] - [\sqrt[3]{x}], \quad (h) \quad f(x) = x^3 \operatorname{sgn}(x),$$

$$(i) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 4} + 1}, \quad (j) \quad f(x) = [x^2],$$

$$(k) \quad f(x) = \{\log_2 x\}, \quad (l) \quad f(x) = \frac{1}{\{x\}},$$

$$(m) \quad f(x) = \left| \left[x + \frac{1}{2} \right] - x \right|.$$

(5) Dla jakich wartości parametrów a i b funkcja $f(x)$ jest ciągła?

Naszkicuj wykres $f(x)$ dla takich a i b .

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} ax + b & : \quad x < 1 \\ x^2 & : \quad 1 \leq x < 2 \\ ax - b & : \quad 2 \leq x. \end{cases}$$

$$(b) \quad f(x) = \begin{cases} x & : \quad x < 1 \\ x^2 + ax + b & : \quad 1 \leq x < 2 \\ x + 3 & : \quad 2 \leq x. \end{cases}$$