ANALIZA MATEMATYCZNA
LISTA ZADAŃ 14

(1) Zbadać zbieżność podanych ciągów, oraz zbieżność jednostajną na podanych zbiorach:

(a) $f_n(x) = \sqrt{x^4 + \frac{x^2}{n}}$, $(-\infty, \infty)$; (b) $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}}$, $(-\infty, \infty)$;

(c) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $[0, 1]$; (d) $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$, $[0, \pi]$;

(e) $f_n(x) = \sin^n(x)$, $(-\infty, \infty)$; (f) $f_n(x) = \frac{1}{1 + x + n}$, $[0, \infty)$;

(g) $f_n(x) = \frac{1}{1 + (x + n)^2}$, $(-\infty, \infty)$; (h) $f_n(x) = \frac{1}{nx}$, $(0, 1]$;

(i) $f_n(x)\frac{nx}{1 + nx^2}$, $[-1, 1]$; (j) $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$, $[-1, 1]$;

(k) $f_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n}\right)$, $[-1, 1]$; (l) $f_n(x) = nx^{-nx^2}$, $[-1, 1]$.

(2) Wyznaczyć zbiór, na którym zbieżny jest szereg, oraz sprawdzić, czy zbieżność jest jednostajna:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-nx^2}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\sqrt{1 + nx}}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\,x)}{10^n}$;

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} n\, e^{-nx}$; (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\, x^n}$; (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + x^2}}$;

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\, x^n}{n^2}$; (h) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n\, x^n$; (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n\, x^n}{n}$;

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} n\big(\sqrt{x\,(1 - x)}\big)^n$; (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$; (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n^2}\right)$;

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$; (n) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$.

(3) Udowodnić, że następujące szeregi są jednostajnie zbieżne na całej prostej $(-\infty, \infty)$:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n!}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{10^n}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + n^2}$.

(4) Udowodnić, że szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\sqrt{1+nx}}$ jest zbieżny jednostajnie na zbiorze $[0,\infty)$.

(5) Udowodnić, że szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx)}{n\,x^n}$ jest zbieżny punktowo, ale nie jednostajnie na zbiorze $[1,\infty)$, oraz że jest zbieżny jednostajnie na zbiorze $[2,\infty)$.

(6) Znaleźć pochodną $f'(x)$ oraz całkę $\int f(x)\,dx$ następujących funkcji:

(a) $\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\,x^n$; (b) $\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}\,x^n$;

(c) $\displaystyle f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\,x^n$; (d) $\displaystyle f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$.

(7) „Zwinąć” następujące szeregi potęgowe, to znaczy znaleźć wzór na sumę, i określić dziedzinę tak powstałej funkcji:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{2n}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2\,x^{2n}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\,n\,x^n$;

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\,(n+1)\,x^n$; (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\,(n+1)\,(n+2)\,x^n$.