Wykład z analizy

Lista 4.

Ciągi

1. Udowodnić nierówność: $2^k < (k+1)!$ dla każdej liczby naturalnej $k \geqslant 2$
2. Udowodnić, że dla dowolnych liczb naturalnych $k \leqslant n$ prawdziwa jest równość
$$\binom{n}{k}\frac{1}{k^n} = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$
3. Udowodnić nierówność Bernoulliego: dla $x > -1$ oraz dowolnego naturalnego $n > 1$ zachodzi $(1+x)^n > 1+nx$. Pokazać, że dla $x > 0$ i $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$ zachodzi $(1+x)^n > 1 + \frac{n(n-1)}{2}$.
4. Udowodnić, że dla dowolnego $n \in \mathbf{N}$ zachodzą równości
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n, \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{\substack{k=1 \\ \text{k-nieparzyste}}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k\text{-parzyste}}}^{n} \binom{n}{k}.$$
5. Pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność $\binom{2n}{n} < 4^n$
6. Udowodnić, że dla dowolnej liczby $a \in \mathbf{R}$ lub $a \in \mathbf{C}$ spełniającej warunek $|a| < 1$ jest $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.
7. Obliczyć granice $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$ oraz $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.
8. Znaleźć granice ciągów $a_n = \sqrt[n]{2^n+3^n}$ i $a_n = \sqrt[n]{2^n+3^n+5^n}$.
9. Dla jakich liczb rzeczywistych α istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+n^\alpha} - \sqrt[3]{n}$? Oblicz te granice.
10. Oblicz granice
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{n^3}.$$
11. Oblicz granice ciągów $a_n = \frac{\sin^2 n}{n}$, $a_n = \sqrt[n]{\ln n}$, $a_n = \frac{1}{n^2}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$.
12. Udowodnij, że jeżeli $\lim_{n\to\infty} = a$ to ciąg wartości bezwzględnych $\{|a_n|\}$ też jest zbieżny, oraz $\lim_{n\to\infty}|a_n| = |a|$. Pokaż też, że powyższe twierdzenie nie działa w drugą stronę, to znaczy znajdź ciąg $\{a_n\}$ który nie jest zbieżny, chociaż $\{|a_n|\}$ jest zbieżny. Udowodnij, jeżeli $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$ to $\{a_n\}$ też jest zbieżny do 0.
13. Udowodnij, że jeżeli ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ spełniają $a_n \leqslant b_n$, to $\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n$.
14. Ciąg a_n dany jest następująco: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, oraz $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$, dla $n = 1, 2, \dots$. Pokaż, że $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}$.
15. Pokazać, że jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ oraz ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony, to $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$.
16. Pokazać, że jeżeli $a_n > 0$, oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ to $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = +\infty$ (granica niewłaściwa).
17. Dany jest ciąg $\{b_n\}$, o którym wiadomo, że
$$\forall\ \epsilon > 0\ \forall\ n \geqslant 10/\epsilon \quad |b_n + 2| \leq \epsilon.$$
Wskazać M takie, że $\forall\ (n \in \mathbf{N})\ |b_n| < M$, N_1 takie, że $\forall\ (n \geqslant N_1)\ b_n < 0$, N_2 takie, że $\forall\ (n \geqslant N_2)\ b_n > -3$, oraz N_3 takie, że $\forall\ (n \geqslant N_3)\ |b_n - 2| > \frac{1}{10}$.
18. Niech $a_n = \frac{\sqrt{n^2+n}}{n}$ oraz $\epsilon = \frac{1}{100}$. Znaleźć $n_0 \in \mathbf{N}$ takie, że dla $n \geqslant n_0$ zachodzi $|a_n - 1| < \epsilon$.