Wykład z analizy

LISTA 3.

CIĄGI

1. Znaleźć 10 kolejnych wyrazów oraz granicę ciągu $\{a_n\}$ określonego wzorem: $a_n = (-1)^n \frac{1}{n^2}$.
2. Jakie wartości przyjmuje ciąg dany wzorem $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$? A ciąg dany wzorem $a_n = \cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3}$?
3. Ciąg Fibonacciego określony jest rekurencyjnie w sposób następujący: $F_1 = F_2 = 1$, a następnie $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Znaleźć wyrazy ciągu Fibonacciego o numerach od 3 do 12. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest równość: $F_{n+2} \cdot F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.
4. Znaleźć pierwszych 12 wyrazów ciągu $\{a_n\}$ określonego, podobnie jak ciąg Fibonacciego, rekurencyjnie $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, przy czym $a_1 = 1, a_2 = 3$; to samo dla $a_1 = 1, a_2 = 4$.
5. Udowodnić, korzystając z definicji, zbieżność ciągów, znajdując ich granice: $a_n = \frac{1}{n^2}$; $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$; $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; $a_n = \frac{n+2}{n-1}$; $a_n = \frac{1}{1+\sqrt{n}}$; $a_n = \frac{3n^3-2n^2-7n+5}{4n^3+n-6}$; $a_n = (\frac{2}{3})^n$.
6. Udowodnić, że jeśli x jest liczbą rzeczywistą o rozwinięciu dziesiętnym $\beta, \alpha_1\alpha_2\cdots$, to ciąg określony wzorem $a_n = \beta, \alpha_1 \cdots \alpha_n$ jest zbieżny do x (, jest punktem dziesiętnym, a $\beta \in \mathbf{Z}$.
7. Udowodnić z definicji, że ciąg stały $a_n = a$ jest zbieżny do granicy a.
8. Udowodnić, że granica sumy (różnicy, ilorazu) ciągów zbieżnych jest sumą (różnicą, ilorazem) ich granic.
9. Zbadać monotoniczność następujących ciągów: $a_n = n + \frac{1}{n}$; $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n^2 - 2$; $a_n = \sqrt[n]{n!}$; $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$; $a_n = \frac{2^n}{n!}$; $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$.
10. Obliczyć granice (być może niewłaściwe) ciągów: $\frac{7n+(\sqrt[3]{n}\sqrt[6]{n})^5\sqrt{9n+1}}{11n^3+7n+3}$; $\sqrt{n^2+n} - n$; $\frac{\sin(n)}{n}$; $r^n,\ r > 0$; $\sqrt[n]{r},\ 0 < r < 1$; $2^n - \frac{1}{n}$; $\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$; $\frac{1+2+4+\cdots+2^n}{1+3+9+\cdots+3^n}$; $\frac{1-2+3-4+5-6+\cdots-2n}{\sqrt{n^2+2}}$; $\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$; $\frac{1+3+9+\cdots+3^n}{3^n}$; $\sqrt{3^n+2^n}\sqrt{3^n+1}$; $\sqrt[n^2]{n}$; $\sqrt[n]{n^2}$; $n(\sqrt{n^2+7} - n)$; $\frac{n^2+n+1}{(n+\sin n)^2}$; $\frac{n^2+1}{n^3+1} + \frac{n^2+2}{n^3+2} + \frac{n^2+3}{n^3+3} + \cdots + \frac{n^2+n}{n^3+n}$; $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2}$; $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+7}-\sqrt{n}}$.
11. Wypisać wzorem ciąg, dla którego $a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2}$, i każdy z wyrazów jest średnią harmoniczną dwóch wyrazów sąsiednich:
$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}\right), \quad n \geqslant 2.$$
12. Wypisać wzorem ciąg, dla którego $a_1 = 1,\ a_2 = 2$, i każdy z wyrazów jest średnią geometryczną dwóch wyrazów sąsiednich:
$$a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}, \quad n \geqslant 2.$$