

Statystyka w Zastosowaniach

Laboratorium 1

Podstawy symulacji komputerowych

Rozważmy problem testowania dla dwóch prób: $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu_1, \sigma^2)$, $Y_1, \dots, Y_n \sim N(\mu_2, \sigma^2)$, σ znane, $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ vs $H_A : \mu_1 \neq \mu_2$, za pomocą statystyki testowej $Z = \frac{|\bar{X} - \bar{Y}|}{\sigma} \sqrt{\frac{n}{2}}$, gdzie $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$.

1. Wyznacz wartości krytyczne dla Z na poziomach istotności $\alpha = 0.1$ i $\alpha = 0.05$.
2. Zaprojektuj badania symulacyjne dla estymacji prawdopodobieństwa popełnienia błędu pierwszego rodzaju α .
 - a) Dla $\alpha = 0.05$ i 0.1 wyznacz liczbę powtórzeń eksperymentu, tak żeby z prawdopodobieństwem 0.95 błąd estymacji był nie większy niż $10\% \alpha$.
 - b) Przeprowadź odpowiednie symulacje i zweryfikuj swoje obliczenia z punktu a).
 - c) Powtórz eksperyment w sytuacji gdy $X_i \sim \text{Exp}(1)$ i $Y_i \sim \text{Exp}(1) + \mu$, gdzie $\text{Exp}(1)$ oznacza rozkład wykładniczy z $\lambda = 1$. Eksperyment przeprowadź dla $n=50$ i $n=100$. Podsumuj wyniki.
3. Dla $\alpha = 0.05$ teoretycznie wyznacz moc testu jako funkcję parametru $\delta = \frac{|\mu_1 - \mu_2|}{\sigma}$.
4. Dla $n=50$ i 100 i $\alpha = 0.05$ wyestymuj funkcję mocy w 10 wybranych punktach. Estymatory wyznacz w oparciu o 500 powtórzeń eksperymentu.
 - a) Porównaj graficznie wartości estymatora z teoretycznie wyznaczoną mocą. Nanieś na wykresie pionowe "poprzeczki" : estymator ± 2 błędy standardowe (wyznaczone w oparciu o wyniki symulacji). Porównaj te wyestymowane błędy standardowe z wartościami wyznaczonymi teoretycznie.
 - b) Dla $\alpha = 0.05$ przeprowadź symulacje funkcji mocy gdy obserwacje generowane są z rozkładu wykładniczego (patrz punkt 2 c). Porównaj z mocą wyznaczoną w punkcie 4 a).