Równania różniczkowe rzędu pierwszego (2).

Równania zupełne

Zadanie 1. W podanych równaniach dobiersz stałą a tak, aby było ono zupełne, a następnie rozwiąż je:

(1) $t + ye^{2ty} + ate^{2ty}y' = 0$;

(2) $\frac{1}{t^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{at+1}{y^3}y' = 0$;

Zadanie 2. Znajdż wszystkie funkcje $f(t)$, dla których równanie $y^2 \sin t + yf(t)\frac{dy}{dt} = 0$ jest zupełne. Rozwiąż równanie dla tych f.

Zadanie 3. Równanie liniowe niejednorodne $y' + a(t)y = b(t)$ nie jest zupełne. Znajdż czynnik całkujący.

Zadanie 4. Rozwiązać równania w postaci różniczek zupełnych:

(1) $2tydt + (t^2 - y^2)dy = 0$;

(2) $e^{-y}dt - (2y + te^{-y})dy = 0$.

Zadanie 5. Sprawdż, że podana funkcja $\mu(x, y)$ jest czynnnikiem całkującym danego równania. Rozwiąż równanie.

(1) $6xydx + (4y + 9x^2)dy = 0$, $\mu(x, y) = y^2$;

(2) $-y^2dx + (x^2 + xy)dy = 0$, $\mu(x, y) = \frac{1}{x^2y}$;

(3) $y(x+y+1)dx+(x+2y)dy = 0$, $\mu(x, y) = e^x$.

Zadanie 6. Równanie różniczkowe może mieć więcej niż jeden czynnik całkujący. Udowodnij, że $\mu_1(x, y) = \frac{1}{xy}$, $\mu_2(x, y) = \frac{1}{y^2}$, $\mu_3(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ są czynnikami całkującymi równania $ydx - xdy = 0$. Uzasadnij, że otrzymane przy pomocy tych czynników całkujących rozwiązania są formalnie równoważne.

Zadanie 7. Scałkować równania metodą czynnika całkującego:

(1) $(\frac{x}{y} + 1)dx + (\frac{x}{y} - 1)dy = 0$;

(2) $(x^2 + y)dx - xdy = 0$;

(3) $(y + x^2)dy + (x - xy)dx = 0$.

Zadanie 8. Równanie postaci $y' + a(t)y = b(t)y^2 + f(t)$, gdzie a, b, f są danymi funkcjami, nazywa się równaniem Riccatiego. Nie istnieje ogólny sposób całkowania tego równania. Udowodnij, że jeżeli znamy jedno rozwiązania $x_1(t)$, to funkcja $u(t) = x(t) - x_1(t)$ spełnia równanie Bernoulliego.

Zadanie 9. Znaleźć rozwiązania szczególne następujących równań Riccatiego, zredukować je do równań typu Bernoulliego i scałkować:

(1) $t^2x' + tx + t^2x^2 = 4$;

(2) $x' + 2xe^t - x^2 = e^{2t} + e^t$.