Wstęp do matematyki (lato 2024)

Lista przygotowawcza przez kolokwium nr 3

1. Dla podanych poniżej funkcji wyznacz obrazy i przeciwobrazy.
   (a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ \ f(x)=x^2-3x+2;\ \ f[[0,1]],\ f[[-2,-1]], f[\{1,2\}],\ f^{-1}[(-\infty,-6]], f^{-1}[\{-3,-4\}];$
   (b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ \ f(x)=\sin(x)+1;\ \ f\left[\left[0,\frac{3}{2}\pi\right]\right],\ f[\{0,\pi\}],\ f^{-1}\left[\left(\frac{1}{2},+\infty\right)\right],\ f^{-1}[(-\infty,1]], f^{-1}[\{1\}];$
   (c) $f:\mathcal{P}(\mathbb{Z})\to\mathcal{P}(\mathbb{Z});\ \ \ f(X)=X\cap[-2,1];\ \ \ f[\mathcal{P}(\mathbb{N})],\ f^{-1}[\emptyset];$
   (d) $f:\mathbb{R}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R};\ \ \ f(x,n)=x^n;\ \ \ f[(0,+\infty)\times\{0\}],\ f^{-1}[\{0\}];$
   (e) $f:\mathcal{P}(\mathbb{R})\to\mathcal{P}(\mathbb{R});\ \ \ f(X)=X\cap\{-x:x\in X\};\ \ \ f[\mathcal{P}(\mathbb{N}^+)],\ f^{-1}[\{\mathbb{R}\}].$

2. Podaj przykład funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o następujących własnościach:
   (a) zbiór $f[(0,1)]$ jest dwuelementowy, a zbiór $f^{-1}[(0,1)]$ jest nieskończony;
   (b) $f[[0,\pi)]=f^{-1}[[0,1]]$.

3. Narysuj graf niepustej relacji na zbiorze $X=\{0,1,2,3\}$, która
   (a) jest przechodnia, nie jest zwrotna, nie jest przeciwzwrotna, nie jest symetryczna;
   (b) jest zwrotna, symetryczna, nie jest przechodnia;
   (c) jest spójna, nie jest słabo antysymetryczna;
   (d) jest przechodnia, nie jest słabo antysymetryczna, ma parzystą liczbę elementów.

4. Czy istnieje relacja R na zbiorze $X=\{0,1,2,3\}$, która jest przeciwzwrotna, przechodnia, ale nie jest słabo antysymetryczna? Odpowiedź uzasadnij.

5. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=x^2$. Na zbiorze $\mathbb{R}$ określamy relację równoważności R warunkiem

$$xRy \iff \text{zbiory } f^{-1}[\{x\}] \text{ i } f^{-1}[\{y\}] \text{ mają tyle samo elementów.}$$

   (a) Wyznacz $[0]_R, [-1]_R$ i $[1]_R$.
   (b) Wyznacz $\mathbb{R}/_R$.

6. Rozważmy relację równoważności R na zbiorze $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ zadaną warunkiem

$$A\,R\,B \iff A\setminus\mathbb{N}^+=B\setminus\mathbb{N}^+.$$

   (a) Wyznacz $[\emptyset]_R$.
   (b) Wyznacz $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})/_R$.

7. Rozważmy relację równoważności R na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ zadaną warunkiem

$$A\,R\,B \iff A\setminus\mathbb{N}^+=B\setminus\mathbb{N}^+.$$

   (a) Czy $[\mathbb{N}]_R\cap[\mathbb{N}^+]_R\neq\emptyset$? Odpowiedzi uzasadnij.
   (b) Wyznacz $[\{1\}]_R$.
   (c) Wyznacz $\mathcal{P}(\mathbb{N})/_R$.

8. Niech $\mathbb{P}$ oznacza zbiór liczb pierwszych. Niech S będzie relacją równoważności na zbiorze $\mathbb{N}^+$ zadaną warunkiem

$$xSy \iff (\forall p\in\mathbb{P})(p|x\Leftrightarrow p|y).$$

   (a) Czy $[10]_S=[15]_S$? Odpowiedź uzasadnij.
   (b) Czy zbiór $\{2n+1:n\in\mathbb{N}\}$ jest klasą abstrakcji relacji S? Odpowiedź uzasadnij.
   (c) Wyznacz $[6]_S$.

Wskazówka: Spróbuj **zrozumieć**, kiedy dwie liczby są ze sobą w relacji S.