

Wstęp do matematyki (lato 2025)

Lista przygotowawcza przed egzaminem

1. O liczbach całkowitych x, y, z wiadomo, że spełniają trzy poniższe warunki:

(♣) $x > 4 \vee y < 4 \vee z < 3$;

(♡) $x > 3 \Rightarrow y < 5$;

(◇) $z < 5 \Rightarrow x = 4 \vee y = 4$.

Udowodnij, że wówczas $y < 5$. **Starannie** opisz rozumowanie.

2. Zapisz symbolicznie poniższe zbiory (używając na przykład „{, }”).

(a) Zbiór wszystkich liczb naturalnych, które są podzielne przez dokładnie jedną z liczb 3 i 5.

(b) Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru liczb całkowitych, do których należy przynajmniej jedna liczba ujemna.

(c) Zbiór wszystkich punktów płaszczyzny $\mathbb{R}^2$, które nie należą do wykresu funkcji sinus.

3. Podaj przykład zbiorów $A, B, C, D \subseteq \mathbb{N}$, takich że A i B są **trzyelementowe**, C i D są **dwuelementowe** oraz

$$(A \times B) \setminus (C \times D) \subseteq (A \times C) \setminus (B \times D).$$

4. Rozważmy funkcję $F : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ zadaną wzorem

$$F(A) = \{[a] : a \in A\},$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby rzeczywistej x . Czy funkcja F jest 1-1? Czy jest „na”? Odpowiedzi uzasadnij.

5. Funkcje $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dane są wzorami $f(x) = \sin x$, $g(x) = x + \pi$, zaś $B = (\frac{1}{2}, 5]$.

(a) Wyznacz zbiór $f[B \cap f^{-1}[B]]$.

(b) Wyznacz zbiór $T = \{x \in \mathbb{R} : (f \circ g)(x) \geq (g \circ f)(x)\}$.

6. Podaj przykłady trzech **różnych** niepustych zbiorów $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ dla których **zachodzi** równość

$$(A \cap B) \cup (B \cap C) = C \setminus (A^c \cap B^c)$$

oraz takich, że żadne dwa z nich nie są rozłączne.

7. Niech R będzie relacją równoważności na zbiorze $P(\mathbb{R}^2)$ zadaną warunkiem

$$A R B \iff A_3 = B_3,$$

gdzie D_3 to cięcie pionowe zbioru $D \subseteq \mathbb{R}^2$ w 3 (przypominam, że jeśli $D \subseteq X \times Y$ i $x \in X$, to $D_x = \{y \in Y : \langle x, y \rangle \in D\}$).

(a) Czy $[\emptyset]_R = \{\emptyset\}$? Odpowiedź uzasadnij.

(b) Podaj przykład nieskończonego zbioru $C \subseteq \mathbb{R}^2$, takiego że $C \in [\{\langle 3, 3 \rangle\}]_R$.

(c) Czy zbiór ilorazowy $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)/_R$ jest przeliczalny czy nieprzeliczalny? Odpowiedź uzasadnij.