Wstęp do matematyki (lato 2024)

Lista zadań nr 12

1. Dla podanych zbiorów A i B znaleźć funkcję ustalającą równoliczność między nimi oraz sprawdzić, że jest ona faktycznie bijekcją.
(a) $A = \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}, \quad B = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$;
(b) $A = \{3n + 1 : n \in \mathbb{N}\}, \quad B = \{6n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$;
(c) $A = \mathbb{N}^+, \quad B = \{n \in \mathbb{N} : (\exists k \in \mathbb{N})\, n = 5k\}$;
(d) $A = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}, \quad B = \mathbb{R}$;
(e) $A = (0, 1), \quad B = (-2, +\infty)$ Wskazówka: funkcja homograficzna;
(f) $A = (-\infty, 3], \quad B = [-2, 1)$ Wskazówka: funkcja homograficzna.

2. Udowodnić poniższe równoliczności.
(a) $\{n \in \mathbb{N} : 2|n\} \sim \{n \in \mathbb{Z} : \neg 2|n\}$;
(b) $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \setminus \{2, 3, 5\}$;
(c) $[0, 2] \setminus \{1\} \sim (1, 3) \cup \{4, 5\}$;
(d) $(0, 2) \sim [0, 1]$;
(e) $\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \setminus (0, 10)$;
(f) $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \sim \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{Q}))$;
(g) $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ jest liczbą pierwszą}\} \sim \mathbb{Q} \cap (0, 5)$;
(h) $(0, 4) \sim \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$;
(i) $[0, 3]^3 \sim \left(0, \frac{1}{10^9}\right)$.
Wskazówka: W tym zadaniu **nie trzeba** konstruować bijekcji pomiędzy podanymi zbiorami. Można skorzystać ze znajdujących się w przesłanych materiałach: tw. 4 i tw. Cantora-Bernsteina. Można też korzystać z tw. 2 oraz ze znanych równoliczości (np. tw. 9, tw. 11, tw. 14, tw. 15), a także, że oba podane zbiory są równoliczne z pewnym „znanym” zbiorem (czyli tak naprawdę z tw. 1(c)).

3. Wskaż bijekcję między zbiorami $A \times B$ i $B \times A$.

4. O zbiorach A i B wiemy, że $|A \cap B| = |A \cup B|$. Pokazać, że $A \sim B$.

5. Określ moce poniższych zbiorów:
(a) $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$
(b) $\mathbb{N} \setminus (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$
(c) $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}) \setminus (\mathbb{Q} \times \mathbb{N})$
(d) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
(e) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q} \vee y \in \mathbb{Q}\}$
(f) $\mathbb{Q} \cup [0, 1]$
(g) $\{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in \mathbb{N})\, y = \ln x\}$

6. Niech R będzie relacją równoważności na zbiorze X. Udowodnij, że

$$|X/_R| \leqslant |X|.$$