# Wstęp do matematyki (lato 2024)

## Lista zadań nr 11 (na ćwiczenia 3.06.2024)

1. Dla podanych zbiorów $X$ i relacji $R$ na $X$ uzasadnij, że $R$ **jest** relacją równoważności. Postaraj się zrozumieć, według jakiej zasady relacja $R$ „grupuje” elementy zbioru $X$.
   (a) $X = \mathbb{Z}$; $\quad xRy \Leftrightarrow 2|(x+y)$,
   (b) $X = \mathbb{R}^2$; $\quad \langle x_1, y_1\rangle R \langle x_2, y_2\rangle \Leftrightarrow x_1 = x_2$,
   (c) $X = \{x \in \mathbb{Z} : 0 < |x| \leqslant 4\}$; $\quad xRy \Leftrightarrow xy > 0$.
   (d) $X = \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$; $\quad ARB \Leftrightarrow A \cap \{1,4\} = B \cap \{1,4\}$.

2. Podaj przykład relacji równoważności $R$ na zbiorze $\mathbb{N}$, spełniającej wszystkie poniższe warunki:
- $1\,R\,2$
- $\neg(2\,R\,3)$
- relacja $R$ ma trzy klasy abstrakcji.

3. Dla podanych zbiorów $X$ i relacji równoważności $R$ na $X$ wyznacz zbiór ilorazowy $X/_R$.
   (a) $X = \mathbb{N}^+$; $\quad xRy \Leftrightarrow 2|(x+y)$,
   (b) $X = \{x \in \mathbb{Z} : 0 < |x| \leqslant 4\}$; $\quad xRy \Leftrightarrow xy > 0$.

4. Na zbiorze $\mathbb{R}$ rozważmy relację równoważności $R$ zadaną warunkiem

$$xRy \Leftrightarrow \sin(x) = \sin(y).$$

   (a) Wyznacz $[0]_R$.
   (b) Wyznacz $[1]_R$. Sprawdź, czy 1 jest elementem otrzymanego zbioru. Jeśli nie, wyznacz tę klasę abstrakcji jeszcze raz, tym razem poprawnie.
   (c) Wyznacz zbiór ilorazowy $\mathbb{R}/_R$.

5. Na zbiorze $\mathbb{R}^2$ rozważmy relację równoważności $R$ zadaną warunkiem

$$\langle x_1, y_1\rangle R \langle x_2, y_2\rangle \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

   (a) Wyznacz i narysuj klasy abstrakcji $[\langle 0,0\rangle]_R, [\langle 1,1\rangle]_R$.
   (b) Jak wygląda podział płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ zadany przez relację $R$ (czyli zbiór ilorazowy tej relacji)? Opisz go.

6. Na zbiorze $\mathbb{N}^2$ rozważmy relację równoważności $R$ zadaną warunkiem

$$\langle n_1, m_1\rangle R \langle n_2, m_2\rangle \Leftrightarrow 2|(n_1+n_2) \wedge 2|(n_1+m_1+n_2+m_2).$$

   (a) Wyznacz $[\langle 0,1\rangle]_R$.
   (b) Wyznacz zbiór ilorazowy $\mathbb{N}^2/_R$.

**Wskazówka**: Pomyśl, jak uprościć definicję relacji $R$. Skorzystaj z zadania 3(a).

7. Na zbiorze $X = [0,10]$ rozważmy relację równoważności $R$ zadaną warunkiem

$$xRy \Leftrightarrow [x, x+1] \cap \mathbb{N} = [y, y+1] \cap \mathbb{N}.$$

   (a) Wyznacz $[3]_R$.
   (b) Wyznacz $\left[\frac{3}{2}\right]_R$.
   (c) Wyznacz zbiór ilorazowy $X/_R$.

8. Niech $X = \{x \in \mathbb{Z} : |x+1| \leqslant 5\}$ i niech funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem $f(x) = \sin(\frac{x\pi}{2})$. Rozważamy relację równoważności $R$ na $X$ zadaną warunkiem $xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.
(a) Wyznacz $[3]_R$.
(b) Wyznacz zbiór ilorazowy $X/_R$.

9. Na zbiorze $\mathbb{N}$ rozważmy relację równoważności $R$ zadaną warunkiem

$$xRy \Leftrightarrow 5 \mid (x^2 - y^2).$$

(a) Wyznacz $[3]_R$.
(b) Wyznacz zbiór ilorazowy $\mathbb{N}/_R$.

10. Niech $X = \{n \in \mathbb{N}^+ : n \leqslant 6\}$. Niech funkcja $f : X \to X$ będzie dana wzorem $f(x) = \left[\sqrt{3x}\right]$, gdzie $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od $x \in \mathbb{R}$. Na zbiorze $\mathcal{P}(X)$ definiujemy relację równoważności $R$ warunkiem

$$A\,R\,B \Leftrightarrow f[A] = f[B].$$

(a) Wyznacz $[\emptyset]_R$.
(b) Ile elementów ma zbiór $\mathcal{P}(X)/_R$? Odpowiedź uzasadnij (uzasadnienie nie musi polegać na wyznaczeniu tego zbioru ilorazowego).

11. Na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ rozważmy relację równoważności $R$ zadaną warunkiem

$$ARB \Leftrightarrow (\mathbb{N} \subseteq A \Leftrightarrow \mathbb{N} \subseteq B).$$

(a) Czy $\{2n+1 : n \in \mathbb{Z}\} \in [\emptyset]_R$?
(b) Czy $[\mathbb{N}]_R = [\mathbb{Z}]_R$?
(c) Ile elementów ma zbiór ilorazowy $\mathcal{P}(\mathbb{Z})/_R$?
**Wszystkie** odpowiedzi uzasadnij.