http://www.math.uni.wroc.pl/~kraszew

Całka niewłaściwa

Zadanie 62. Oblicz całki niewłaściwie:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}, \quad \int_0^{\infty} e^{-3x}\, dx, \quad \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx.$$

Równania różniczkowe

Zadanie 63. Znaleźć rozwiązania ogólne (jawne bądź uwikłane) następujących równań różniczkowych.
a) $y' = e^{x+y}$, b) $y' = \frac{\sqrt{x}}{y}$, c) $y' = \frac{\sqrt{y}}{x}$, d) $y' = \frac{y+1}{x+1}$.

Zadanie 64. Znajdź rozwiązania następujących zagadnień początkowych:
a) $y' = 2, \quad y(0) = 2,$
b) $y' = \frac{y}{x}, \quad y(1) = 5,$
c) $y' = \frac{1}{y^2}, \quad y(1) = 3,$
d) $y' = -y^2 e^x, \quad y(0) = \frac{1}{2},$
e) $y' = \frac{e^x}{e^y}, \quad y(0) = \ln 2,$
f) $xyy' = \ln x, \quad y(1) = 1,$
g) $yy' = xe^{-y^2}, \quad y(0) = 0,$
h) $yy' = x(1+y^2), \quad y(0) = 1,$
i) $y' = (2-y)^2 e^x, \quad y(0) = 1.$

Zadanie 65. Znaleźć rozwiązania ogólne następujących równań liniowych pierwszego rzędu (metodą czynnika całkującego):
a) $y' + xy = 5x$, b) $y' - 2y = 4x$.

Zadanie 66. (bez kalkulatora) Wiadomo, że szybkość zmian temperatury danego ciała jest proporcjonalna do różnicy między temperaturą tego ciała i temperaturą otoczenia (prawo Newtona). Zakładamy, że $S(0) = 100°\mathrm{C}$ w temperaturze otoczenia 20°C. Po dziesięciu minutach temperatura ciała wynosiła 60°C. Po ilu minutach ciało będzie miało temperaturę 25°C?

Zadanie 67. (kalkulator może pomóc) Pewna osoba uczy się pisać na maszynie. Niech N oznacza maksymalną liczbę słow jakie potrafi napisać ona napisać w ciągu minuty. Załóżmy, że prędkość zmian N jest proporcjonalna do różnicy pomiędzy N oraz górną granicą 140. Rozsądnym jest założyć, że na początku osoba ta nie potrafiła napisać żadnego słowa (tzn. $N(0) = 0$). Okazało się, że osoba ta potafi napisać 35 słów na minutę po 10 godzinach uczenia się.
a) Ile słów na minutę będzie pisać ta osoba po 20 godzinach uczenia się?
b) Jak długo musi ona ćwiczyć, aby napisać 105 słów na minutę?

Zadanie 68. (kalkulator może pomóc) Ciało zamordowanego znaleziono o 19:30. Lekarz sądowy przybył o 20:20 i natychmiast zmierzył temperaturę ciała denata. Wynosiła ona $32,6°$ C. Godzinę później, gdy usuwano ciało, temperatura wynosiła $31,4°$C. W tym czasie temperatura w pomieszczeniu wynosiła 21°C. Najbardziej podejrzana osoba, która mogła popełnić to morderstwo – Jan G., twierdzi jednak, że jest niewinny. Ma alibi. Po południu był on w restauracji. O 17:00 miał krótką rozmowę zamiejscową, po której natychmiast opuścił restaurację. Restauracja znajduje się 5 minut na piechotę od miejsca morderstwa. Czy alibi to jest niepodważalne?

Zadanie 69. *(Ciąg dalszy zadania poprzedniego)*. Obrońca Jana G. ustalił, że zamordowany był u lekarza o 16:00 w dniu śmierci i wtedy jego temperatura wynosiła $38,3°\mathrm{C}$. Załóżmy, że taką temperaturę miał on w chwili śmierci. Czy można dalej podejrzewać, że Jan G. popełnił to morderstwo?

Zadanie 70. Znaleźć rozwiązania ogólne równań:
a) $y'' - 3y' = 0$,
b) $y'' - 4y' + 4y = 0$,
c) $y'' + y = 0$,
d) $y'' - 4y' + 13y = 0$,
e) $y'' - 3y' - 4y = 12$,
f) $y'' + 2y' + y = 5$.

Zadanie 71. Znaleźć rozwiązania szczególne następujących zagadnień początkowych:
a) $y'' + y' - 2y = 6,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$;
b) $y'' - 3y' - 10y = 100,\ y(0) = -10,\ y'(0) = 0$;
c) $y'' + 2y' + 5y = 0,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = -4$.

Zadanie 72. Równanie różniczkowe $y'' + 5y' + 4y = 8$ jest typowym równaniem, które pojawia się przy badaniu krzywej uczenia się szczura w pewnym eksperymencie psychologicznym. Znajdź rozwiązanie szczególne tego równania spełniające warunki początkowe $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. Oblicz granicę tego rozwiązania, gdy $t \to \infty$.

Zadanie 73. Znaleźć rozwiązania szczególne następującego zagadnienia początkowego:
$x' = -x + y,\ y' = 2x,\ x(0) = 1,\ y(0) = 1$.

Zadanie 74. (jak starczy czasu) Narząd posiada dwie komory oddzielone membraną. Zakładamy, że lek wstrzykiwany do pierwszej komory może poruszać się pomiędzy komorami, a także opuścić organ przez komorę drugą. Niech x będzie stężeniem leku w komorze pierwszej oraz niech y będzie stężeniem leku w komorze drugiej w czasie t. Dowody eksperymentalne sugerują, że x i y spełniają następujący układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} & = y - 6x \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} & = 6x - 7y \end{cases}$$

gdzie x oraz y są funkcjami czasu t w godzinach. Wprowadzono 40 jednostek leku do pierwszej komory, więc $x(0) = 40$ oraz $y(0) = 0$. Znajdź rozwiązanie układu oraz stężenie leku w obu komorach po 6 minutach.

Jan Kraszewski