Lista 3.

0. Rozwiąż zadania z poprzednich listy
1. Niech T będzie dowolnym zbiorem indeksów. Udowodnić, że jeśli dla każdego $t \in T$ rodzina $\mathcal{R}_t$ jest pierścieniem to również $\bigcap_{t\in T} \mathcal{R}_t$ pierścieniem. Podaj przykład pierścieni, takich że $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ nie jest pierścieniem.
2. Uzasadnij, że dla dowolnego pierścienia $\mathcal{R}$ jeżeli $A,\ B$ należą do R to również $A \triangle B,\ A \cap B$ należą do $\mathcal{R}$ ($\triangle$ oznacza różnicę symetryczną).
3. Niech X będzie nieprzeliczalnym zbiorem. Definiujemy

$$\mathcal{F} = \{E \subseteq X : E \text{ lub } E^c \text{ jest co najwyżej przeliczalny}\},$$

oraz dla $E \in \mathcal{F}$

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } E \text{ jest co najwyżej przeliczalny} \\ 1 & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Uzasadniij, że $(X, \mathcal{F}, \mu)$ jest przestrzenią miarową.
4. Wykaż, że jeśli $\mathcal{R}$ jest pierścieniem a $\mu_0 : \mathcal{R} \mapsto [0, \infty]$ jest addytywna to $\mu_0(A \triangle B) \leqslant |\mu_0(A) - \mu_0(B)|$.
5. Niech $\mathcal{F}_n$ będzie rosnącym ciągiem σ-ciał oraz $(X, \mathcal{F}_n, \mu_n)$ ciągiem przestrzeni miarowych spełniającym $\mu_1(X) < \infty$, $\mu_m(E) = \mu_n(E)$ dla dowolnych $m \geqslant n$ oraz $E \in \mathcal{F}_n$. Uzasadnij, że
   i) $\mu_0(E) = \mu_n(E)$ o ile $E \in \mathcal{F}_n$ jest dobrze zdefiniowaną przeliczalnie addytywną funkcją zbioru na $\bigcup_{n\geqslant 1} \mathcal{F}_n$ (por. zad. 3 z listy 2.)
   ii) Istnieje jedyna miara μ na $\mathcal{F} := \sigma(\mathcal{R})$, taka że dla dowolnego n oraz $E \in \mathcal{F}_n$ zachodzi $\mu(E) = \mu_n(E)$.
6. Niech μ będzie miarą na σ-ciele $\mathcal{F}$ podzbiorów przestrzeni X. Niech $A,\ A_n \in \mathcal{F}_n$. Wykazać, że
   i) Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$, to $\mu(\limsup A_n) = 0$.
   ii) Jeśli (A_n) jest ciągiem rosnącym to $\lim_n \mu(A_n) = \mu(\lim_n A_n)$.
   iii) Jeśli (A_n) jest ciągiem malejącym oraz $\mu(A_1) < \infty$ to $\lim_n \mu(A_n) = \mu(\lim_n A_n)$.
   iv) $\mu(\liminf A_n) \leqslant \liminf \mu(A_n) \leqslant \liminf \mu(A_n)$.
   v) Jeśli $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) < \infty$, to $\limsup \mu(A_n) \leqslant \mu(\limsup A_n)$. Czy to założenie jest istotne?
   vi) Pokazać na przykładach, że nierówności w poprzednich podpunktach mogą być ostre
   vii) Jeśli μ jest skończoną miarą oraz dla każdego n zachodzi nierówność $\mu(A_n) \geqslant \delta > 0$, to istnieje x, taki że $x \in A_n$ dla nieskończenie wielu n.
   viii) Jeśli $\lim A_n = A$ oraz $\mu(\cup_n A_n) < \infty$ to $\lim \mu(A_n \triangle A) = 0$.
7. Dany jest ciąg (μ_n) miar na σ-ciele $\mathcal{F}$ podzbiorów przestrzeni X. Wykaż, że

$$\psi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A),$$

jest również miarą. Podaj przykład miar μ_n, taki że $\sup_n \mu_n$ nie jest miarą.
8. Dla niemalejącej lewostronnie ciągłej funkcji F na $\mathbb{R}$ definiujemy miarę zewnętrzną

$$\mu_F^*(A) = \inf \left\{ \sum_i F(b_i) - F(a_i) : A \subseteq \bigcup_i [a_i, b_i) \right\}.$$

Udowodnić, że

$$\mu_F^*(A \cup B) = \mu_F^*(A) + \mu_F^*(B)$$

dowolnych zbiorów spełniających $d(A, B) > 0$, gdzie $d(x, y) = |x - y|$ jest naturalną metryką na $\mathbb{R}$.