6 Lista 6

- [1] Modelujemy kwotę odszkodowania za szkodę samochodową rozkładem z dystrybuantą

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - \left(\frac{2000}{x+2000}\right)^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

- [2] Modelujemy liczbę szkód na polisę w jednym roku rozkładem z dystrybuantą

$$F_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.5, & 0 \leq x < 1, \\ 0.75, & 1 \leq x < 2, \\ 0.87, & 2 \leq x < 3, \\ 0.95, & 3 \leq x < 4, \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

6.1 Rozpatrzmy ryzyko X z dystrybuantą zadaną odpowiednio powyżej. Podaj funkcję gęstości (lub funkcję prawdopodobieństwa) dla rozkładu z modelu [1].

6.2 Rozpatrzmy ryzyko X z dystrybuantą zadaną odpowiednio powyżej. Podaj funkcję gęstości (lub funkcję prawdopodobieństwa) dla rozkładu z modelu [2].

6.3 Oblicz średnią dla rozkładu z modelu [1].

6.4 Oblicz średnią dla rozkładu z modelu [2].

6.5 Oblicz odchylenie standardowe dla rozkładu z modelu [1].

6.6 Oblicz odchylenie standardowe dla rozkładu z modelu [2].

6.7 Dla dystrybuanty $F(x) = 1 - x^{-2}, \quad x \geq 1$ oblicz wielkość modalną, średnią i medianę.

6.8 Z próby 1000 polis zdrowotnych oszacowano, że średnia rocznych korzyści wypłaconych z polisy wynosi 1300 z odchyleniem standardowym 400. Na następny rok spodziewane jest, że zostanie podpisanych 2500 kontraktów. Przy użyciu centralnego twierdzenia granicznego oszacuj prawdopodobieństwo, że wypłacone korzyści będą większe niż 101% oszacowanej średniej.

6.9 Wielkość szkody pożarowej zależy od czasu $T = t$ trwania pożaru, i wyraża się wzorem $b(e^{at} - 1)$. Pokaż, że jesli T ma rozkład wykładniczy, to wielkość szkody ma rozkład ParetoII. Podaj parametry tego rozkładu.

6.10 Ryzyko X ma rozkład ParetoII(α, θ). Jaki rozkład ma ryzyko Y gdy

$$Y = \log(1 + X/\theta).$$

6.11 Policz $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ dla rozkładu wykładniczego.

6.12 Policz $\mathrm{TVaR}_\alpha(X)$ dla rozkładu wykładniczego.

6.13 Policz $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ dla rozkładu Pareto II.

6.14 Policz $\mathrm{TVaR}_\alpha(X)$ dla rozkładu Pareto II.

6.15 Pokaż, że jeśli N ma rozkład normalny ze średnią 0 i wariancją 1: $\mathcal{N}(0,1)$ to $X = \sigma N + \mu$ ma rozkład normalny $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Następnie pokaż, że

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \mu + \sigma \Phi^{-1}(\alpha),$$

gdzie Φ jest dystrybuantą zmiennej losowej N.

6.16 * Dla X z poprzedniego zadania pokaż, że

$$\mathrm{TVaR}_\alpha(X) = \mu + \sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1 - \alpha},$$

gdzie ϕ i Φ są odpowiednio gęstością i dystrybuantą zmiennej losowej N.

6.17 Pokaż, że $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ ma następującą własność:

- monotoniczność: $X \leq_{st} Y$ implikuje $\mathrm{VaR}_\alpha(X) \leq \mathrm{VaR}_\alpha(Y)$.

6.18 Pokaż, że $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ ma następującą własność:

- dodatnia jednorodność: $\mathrm{VaR}_\alpha(cX) = c\mathrm{VaR}_\alpha(X)$, dla $c > 0$.

6.19 Pokaż, że $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ ma następującą własność:

- $\mathrm{VaR}_\alpha(X + c) = \mathrm{VaR}_\alpha(X) + c$, dla $c > 0$.