5 Lista 5; Ubezpieczenia i renty życiowe

5.1 Oblicz $\bar{a}_{20}$ jeśli wiadomo, że przyszły czas życia 0-latka jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem 0.1 oraz natężenie oprocentowania równe jest 0.1.

5.2 * Wyprowadź wzór na jednorazową składkę netto renty n-letniej.

5.3 Oblicz jednorazową składkę netto renty z dołu dla 30-latka na 3 lata w wysokości 3000. Obliczenia wykonaj dla TTŻ-PL97m oraz $i = 4\%$.

5.4 Oblicz JSN dla następującej renty dla 30-latka: jeśli żyje on pod koniec pierwszego roku wypłata wynosi 1000, jeśli żyje pod koniec drugiego roku wypłata wynosi 3000, jeśli żyje on pod koniec trzeciego roku wypłata wynosi 5000. Obliczenia wykonaj dla TTŻ-PL97m oraz $i = 4\%$. Porównaj z wynikiem zadania 5.3. Która składka jest większa i dlaczego?

5.5 Podaj wzór na obecną wartość dla następującej renty dla 30-latka:

- 1000 na koniec każdego miesiąca w wieku 30 do 40 lat;
- 2000 na koniec każdego miesiąca w wieku 40 do 50 lat;

5.6 * Wyprowadź wzór na aktuarialną obecną wartość dla renty z zadania 5.5.

5.7 ^{R*} W zadaniu 5.6 podaj dokładny wynik dla TTŻ-PL97m oraz $i = 4\%$.

5.8 Zakładając HU, obliczyć $\bar{A}_{45}$, wiedząc, że
$\ddot{a}_{45} = 19.864$ oraz $A_{45} = 0.42143$.

5.9 Pokaż, że $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$ obliczone dla stałego natężenie śmiertelności μ i przy sile stopy procentowej δ jest równe $\bar{a}_{\overline{n}|}$ obliczone przy sile stopy procentowej $\delta + \mu$.

5.10 Załóżmy, że Y jest obecną wartością renty na całe życie wypłacającej 1 na rok dla x-latka. Dane jest $\ddot{a}_x = 10$ przy $i' = 1/24 = e^{\delta} - 1$, $\ddot{a}_x = 6$ przy $i = e^{2\delta} - 1$. Oblicz wariancję Y.

5.11 Uzasadnij (Wykonując obliczenia lub odpowiednie rysunki), że

(i) $a_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1 + A_{\overset{1}{x:\overline{n}|}}$;

(ii) $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + a_{x:\overline{n-1}|}$.

5.12 Uzasadnij (Wykonując obliczenia lub odpowiednie rysunki), że

(i) $a_{x:\overline{n}|} = v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - A_{\underset{x:\overline{n}|}{1}}$;

(ii) $a_{x:\overline{n-1}|} = v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - A_{x:\overline{n}|}$.

5.13 Niech Y będzie obecną wartością renty dożywotniej dla 70-latka, gwarantującej mu wypłatę 100 na początku każdego roku. Oblicz $\mathrm{Var}(Y)$ jeśli wiadomo, że

$$A_{69} = 0.55211, \quad {}^2A_{69} = 0.34022, \quad p_{69} = 0.97, \quad v = 0.95.$$

5.14 Oblicz $\bar{P}_x$, jeśli T_0 ma rozkład wykładniczy z gęstością $(1/100)e^{-x/100}$, $x \geq 0$ oraz $x = 40$ i $\delta = 3\%$.

5.15 40-latek kupuje dwuletnie ubezpieczenia na życie płatne na koniec roku śmierci. Przy zawarciu umowy płaci Π, a jesli przeżyje pierwszy rok płaci $\Pi/2$. Zakładając, że składka jest netto, oblicz Π, wiedząc, że: przyszły czas życia ma rozkład de Moivre'a z $\omega = 100$ oraz $i = 4\%$.

5.16 Udowodnij, że

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\delta \bar{A}_x}{1 - \bar{A}_x}.$$

5.17 * W przypadku jednostkowej polisy na całe życie opłacanej składką o stałej intensyności (powiedzmy $\bar{\Pi}$), całkowita strata ubezpieczyciela gdy ubezpieczony umrze w chwili t wynosi $L(t) = v^t - \bar{\Pi}\bar{a}_{\overline{t}|}$. Wykaż, że $L(0) = 1$ oraz $L(t)$ jest funkcja malejącą i $\lim_{t\to\infty} L(t) = -\bar{\Pi}/\delta$. Wywnioskuj stąd, że istnieje dokładnie jeden moment t_0, taki, że całkowita strata ubezpieczyciela wynosi 0. Z jakiego twierdzenia z analizy matematycznej korzystasz?

5.18 Sześćdziesięciolatek podpisuje umowę ubezpieczeniową w ramach, której za rok powinien wpłacić sumę x po czym od razu zacznie otrzymywać dożywotnią rentę wypłacaną ze stałą intensywnością 1000. Oblicz x zakładając, że przyszły czas życia sześćdziesięciolatka ma rozkład wykładniczym z parametrem $\frac{1}{90}$ oraz, że natężenie oprocentowania wynosi $\frac{1}{10}$.

5.19 Niech T_{20} będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem 0.02 opisującą przyszły czas życia dwudziestolatka podpisującego umowę ubezpieczeniową, w której składki płacone są ze stałą intensywnością i która gwarantuje wypłatę kwoty 1000 w chwili śmierci ubezpieczonego. Zakładając stałą intensywność oprocentowania w czasie trwania ubezpieczenia oraz że zachodzi warunek równoważności. Oblicz intensywność płaconych składek.

5.20 Rozpatrzmy następujący produkt ubezpieczeniowy dla 20-latka - jeśli umrze on w pierwszym roku trwania umowy to wypłata wynosi 1000 PLN, jeśli żyje na koniec drugiego roku to wypłata wynosi 2000 PLN. Ubezpieczony płaci składki w wysokości x PLN na początku pierwszego roku oraz $2x$ PLN na początku drugiego roku. Znajdź x. Do obliczeń przyjmij, że efektywna stopa procentowa w pierwszym roku wynosi $i_1 = 60\%$ natomiast w drugim roku wynosi $i_2 = 25\%$ ponadto $l_{20} = 1000, l_{21} = 800, l_{22} = 400$.

5.21 Rozpatrzmy następującą rentę dla 30-latka - jeśli żyje on na koniec pierwszego roku to wypłata wynosi 1000 PLN, jeśli żyje na koniec drugiego roku to wypłata wynosi 2000 PLN. Dla renty tej oblicz jej obecną wartość aktuarialną (jednorazową składkę netto). Do obliczeń przyjmij, że efektywna stopa procentowa wynosi $i = 50\%$ oraz $l_{30} = 1000, l_{31} = 900, l_{32} = 810$.