

4 Lista 4: Ubezpieczenia życiowe

4.1 Oblicz \bar{A}_{60} jeśli wiadomo, że przyszły czas życia 60-latka jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym ze średnią 20 oraz $v = 0.95$.

4.2 Oblicz \bar{A}_{60} , przy założeniu, że przyszły czas życia 60-latka T_{60} ma rozkład jednostajny ze średnią 20 oraz $v = 0.95$.

4.3 Załóżmy, że funkcja przeżycia wyraża się wzorem

$$s(x) = 1 - \frac{x}{110}$$

dla $x \in [0, 110]$. Wyznacz jednorazową składkę netto czystego ubezpieczenia na dożycie na 5 lat dla osoby w wieku 20 lat. Do obliczeń przyjmij stopę procentową 0%.

4.4 Wyprowadź wzór na wariancję obecnej wartości czystego ubezpieczenia na dożycie.

4.5 Uzasadnij (wykonując obliczenia lub odpowiednie rysunki), że

$$A_x = vq_x + vA_{x+1}p_x.$$

4.6 * Uzasadnij (wykonując obliczenia lub odpowiednie rysunki), że

$$(IA)_x = vq_x + vp_x(A_{x+1} + (IA)_{x+1}),$$

gdzie $(IA)_x$ jest obecną wartością aktuarialną rosnącego ubezpieczenia dla x - latka wypłacającego k w przypadku śmierci w k - tym roku trwania ubezpieczenia.

4.7 * Uzasadnij (wykonując obliczenia lub odpowiednie rysunki), że

$$(DA)_{x:\overline{n}|} = (n+1)A_{x:\overline{n}|} - (IA)_{x:\overline{n}|},$$

gdzie $(DA)_{x:\overline{n}|}$ jest obecną wartością aktuarialną n - letniego ubezpieczenia malejącego dla x - latka wypłacającego $n - k + 1$ w przypadku śmierci w k - tym roku trwania ubezpieczenia.

4.8 Korzystając z TTŻ-PL97k oraz wiedząc, że $A_{\overline{1}|} = 0.9$ oblicz efektywną stopę procentową.

- 4.9 Korzystając z TTŻ-PL2018m oraz zakładając, że $v = 0.95$ oblicz drugi moment obecnej wartości ubezpieczenia terminowego na 3 lata dla 67-latka na sumę ubezpieczenia 100.
- 4.10 ^R Oblicz $1000A_{\overline{40:\overline{25}}}$. Do obliczeń przyjmij $i = 5\%$ oraz skorzystaj z TTŻ-PL97k, TTŻ-PL97m, TTŻ-PL2018k, TTŻ-PL2018m. Porównaj i zinterpretuj otrzymane wyniki.
- 4.11 Oblicz wariancję obecnej wartości jednorocznych ubezpieczeń:
- (i) na życie,
 - (ii) czystego na dożycie,
- dla 40-latka z sumą ubezpieczenia 1000. Do obliczeń przyjmij $i = 5\%$ oraz skorzystaj z TTŻ-PL97m.
- 4.12 Przy założeniach jak w poprzednim zadaniu, oblicz wariancję obecnej wartości jednorocznego ubezpieczenia na życie i dożycie 40-latka z sumą ubezpieczenia 1000. Otrzymany wynik porównaj z rezultatem otrzymanym w poprzednim zadaniu czyli z sumą wariancji dla dwóch niezależnych ubezpieczeń - terminowego i czystego na dożycie.
- 4.13 Oblicz obecną wartość aktuarialną 2000 do wypłacenia 40-latce po 30 latach korzystając z TTŻ-PL97k. Do obliczeń przyjmij techniczną stopę procentową $i = 3\%$.
- 4.14 Firma "X" ma w ofercie ubezpieczenie na życie na 2 lata wypłacające 1 na koniec roku śmierci. W celach marketingowych ubezpieczenie jest opłacone jedną składką P płatną na początku drugiego roku trwania ubezpieczenia. Zakładamy, że mamy dane TTŻ l_x , $x = 0, 1, \dots$ oraz czynnik dyskonta v . Oblicz P .
- 4.15 Portfel składa się ze 100 polis na całe życie dla 40 latków płatnych w chwili śmierci. Każda polisa jest wystawiona na sumę ubezpieczenia 1000 zł. Załóżmy, że czas trwania życia 40-latka jest jednostajny na odcinku $(0, 40)$ oraz mamy dane stałe natężenie stopy procentowej $\delta = \frac{1}{5}$. Jaką minimalną kwotę należy zainwestować w chwili 0 aby były możliwe wypłaty wszystkich polis z tego funduszu z prawdopodobieństwem 0,95? Wiadomo, że $\Phi(1.645) = 0.95$, gdzie $\Phi(\cdot)$ jest dystrybuantą rozkładu normalnego.

- 4.16 Portfel składa się z 1000 polis na życie dla 40-latków, z których każda wypłaca 1000 PLN na koniec roku śmierci. Jaki musi być zabezpieczony fundusz w chwili $t = 0$ aby z prawdopodobieństwem 0.95 możliwe były wypłaty na koniec pierwszego roku. Do obliczeń przyjmij, że efektywna stopa procentowa $i = 0.05$, $l_{40} = 1000$, $l_{41} = 900$, $\Phi(1.645) = 0.95$, gdzie $\Phi(\cdot)$ jest dystrybuantą rozkładu normalnego.
- 4.17 Rozpatrujemy portfel 100 polis dla 30-latków na całe życie, płatnych w chwili śmierci. Każda polisa jest wystawiona na sumę ubezpieczenia 1000 PLN. Jaki musi być zabezpieczony fundusz w chwili 0, aby z prawdopodobieństwem 0.95 były możliwe wypłaty wszystkich polis? Do obliczeń przyjmij, że przyszłe czasy trwania życia 30-latków są niezależne, $\bar{A}_{30} = 0.8$, ${}^2\bar{A}_{30} = 1$ oraz $\Phi(1.645) = 0.95$, gdzie $\Phi(\cdot)$ jest dystrybuantą rozkładu normalnego.
Uwaga: do przeprowadzenia obliczeń nie jest potrzebna znajomość stopy procentowej. Przed podstawieniem wartości najpierw wykonaj odpowiednie przekształcenia i uprość wzory.
- 4.18 Trzyletnie ubezpieczenie dla osoby w wieku x wypłaca 1000 zł jeśli śmierć nastąpi w pierwszym roku, 2000 zł jeśli śmierć nastąpi w drugim roku. Wypłaty dokonywane są na koniec roku śmierci. W przypadku dożycia do końca trwania ubezpieczenia wypłacana jest kwota 3000 zł. Wiadomo że

$$q_x = 0.2, \quad {}_1|q_x = 0.2, \quad {}_2|q_x = 0.3, \quad v = 0.9.$$

- (i) Podaj wzór na obecną wartość tego ubezpieczenia.
(ii) Oblicz jednorazową składkę netto.
- 4.19 Rozpatrujemy ciągły model bezterminowego ubezpieczenia na życie ze składką P płatną jednorazowo w momencie zawierania umowy i sumą ubezpieczenia $1000e_{50}$. Wyznacz P wiedząc, że ubezpieczony to osoba 50-letnia z populacji de Moivre'a z granicznym wiekiem $\omega = 110$ oraz natężenie oprocentowania $\delta = 0.05$
- 4.20 Oblicz jednorazową składkę netto ubezpieczenia na życie spełniającego następujące warunki:

- ubezpieczenie zostało zawarte na 5 lat przez osobę w wieku 30 lat;

- świadczenie jest płatne w chwili śmierci ubezpieczonego;
- w trakcie trwania ubezpieczenia jego suma rośnie jednostajnie wraz z upływem czasu od 0 PLN do 100 PLN.

Do obliczeń przyjmij, że natężenie oprocentowania oraz natężenie zgonów są stałe w rozpatrywanym okresie i przyjmują jednakową wartość równą 0.05.