3 Lista 3: Teoria procentu składanego

3.1 Załóżmy, ze w j-tym roku ($j = 1, 2, \ldots, n$) efektywna stopa procentowa wynosi i_j. Podaj wzór opisujący zależność między k_0 - wartością kapitału w chwili 0 a k_n - wartością kapitału w chwili n.

3.2 Znajdź stopę procentową i, dla której poniższy przepływ pieniądza spełnia warunek równoważności:
na początku roku 1 wpłata w wysokości 100,
na początku roku 2 wpłata w wysokości 100,
na początku roku 3 wypłata w wysokości 231. Jaka jest bieżąca wartość tego przepływu w połowie 2 roku gdy obowiązującą stopą procentową jest i?

3.3 Rozważmy przepływ pieniądza $C_0 = C_1 = \ldots = C_n = 7$. Podaj wzór na

(i) obecną wartość tego przepływu;

(ii) zakumulowaną wartość na chwilę n.

3.4 Pokaż (wykonując obliczenia lub odpowiednie rysunki), że

(i) $a_{\overline{n+k}|} = a_{\overline{k}|} + v^k a_{\overline{n}|} = v^n a_{\overline{k}|} + a_{\overline{n}|}$;

(ii) ${}_{k|}a_{\overline{n}|} = v^k a_{\overline{n}|} = a_{\overline{n+k}|} - a_{\overline{k}|}$;

(iii) $\ddot{a}_{\overline{n}|} + v^n = a_{\overline{n}|} + 1$.

3.5 Niech P będzie wartością obecną 5 letniej renty, której płatność w chwili t wynosi $4t^3$. Wyznacz P jeśli natężenie oprocentowania (δ) w chwili t wynosi t^4.

3.6 Załóżmy, że począwszy od początku 5 roku do pewnego funduszu wpłacane jest 1000 zł i wypłacane 500 zł naprzemiennie co rok.

(i) Jaka jest obecna wartość opisanego przepływu przy założeniu że znamy czynnik dyskonta v? Jak opisać obecną wartośc przepływu w języku rent?

(ii) Jaka jest wartość opisanego przepływu w chwili 15 przy założeniu że znamy czynnik dyskonta v?

3.7 Z tytułu renty bezterminowej dokonywane są płatności w wysokości 2^{-k} na koniec k-tego roku ($k = 1, 2, \ldots$). Dla czynnika dyskonta $v = \frac{3}{4}$ oblicz obecną wartośc tej renty.

3.8 Rozważmy strumień pieniądza $C_n = 5n + 1$ w kolejnych latach $n = 0, 1, 2, \ldots$. Zakładając, że czynnik dyskonta wynosi $v = 0.9$, oblicz obecną wartość tego przepływu.

3.9 Pokaż (wykonując obliczenia lub odpowiednie rysunki), że

$$(I\ddot{a})_{\overline{n}|} + (D\ddot{a})_{\overline{n}|} = (n+1)\ddot{a}_{\overline{n}|},$$

gdzie $(I\ddot{a})_{\overline{n}|}$ oznacza obecną wartość n-letniej renty rosnącej z góry czyli wypłacającej na początku kolejnych lat odpowiednio $1, 2, 3, \ldots$, natomiast $(D\ddot{a})_{\overline{n}|}$ oznacza obecną wartość n-letniej renty malejącej z góry wypłacającej na początku kolejnych lat odpowiednio $n, n-1, \ldots$.

3.10 Rozważmy dwa fundusze - A i B. Do funduszu A dokonujemy wpłat z góry, przez 10 lat, systematycznie 6 razy w roku. Wpłaty rosną co pół roku czyli pierwsze 3 wpłaty wynoszą 1000 PLN, kolejne 3 wpłaty wynoszą 2000 PLN, kolejne 3 wpłaty są w wysokości 3000 PLN itd.

Do funduszu B również dokonujemy wpłat z góry przez 10 lat systematycznie 6 razy w roku ale wpłaty maleją 2 razy w roku - co pół roku. Pierwsze 3 wpłaty wynoszą 20000 PLN kolejne 3 to 19000 PLN, kolejne 3 to 18000 PLN itd.

Przyjmując, że roczna nominalna stopa procentowa wynosi $i^{(6)} = 0.06$ oblicz

(i) obecną wartość *łącznego* przepływu pienienieżnego wpłat do funduszy A i B,

(ii) bieżącą wartość wartość *łącznego* przepływu pieniężnego wpłat do funduszy A i B na koniec drugiego roku.