2 Lista 2: Analiza przeżycia, c.d.

TTŻ-PL2018k oznacza polskie tablice trwania życia kobiet z 2018 roku. Podobnie np. TTŻ-PL97m oznacza tablice z 1997 roku dla mężczyzn. Tablice dostępne są na stronach GUSu.

2.1 Zakładając, że przyszły czas życia opisywany jest przez TTŻ-PL2018k oblicz prawdopodobieństwo, że 20-latka

- (i) umrze nie później niż w 50 roku życia,
- (ii) dożyje 70 lat,
- (iii) umrze między 30 a 40 rokiem życia,
- (iv) przeżyje 30 lat a następnie umrze w ciągu kolejnych 40 lat.

2.2 Pokaż, że

$$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_x = \frac{1}{l_x} \sum_{k=1}^{\infty} l_{x+k}.$$

2.3 Osobno dla TTŻ-PL97k, TTŻ-PL97m, TTŻ-2018k oraz TTŻ-2018m oblicz (oraz porównaj i zinterpretuj wyniki)

- (i) ${}_{20}p_{40}$;
- (iii)^R e_{40}.

2.4 ^{R*} Znajdź parametry B, c, które najlepiej dopasowują prawo Gompertza do TTŻ-PL2018m (opisz metodę, której używałeś).

2.5 Oblicz ${}_{40}p_{25}, {}_{10}q_{55}, {}_{10|10}q_{55}$ zakładając, że rozkład trwania życia osoby nowo urodzonej podlega prawu de Moivre'a z parametrem $\omega = 85$. Oblicz powyższe prawdopodobieństwa korzystając z tablic trwania życia Halleya. Jak zinterpretujesz otrzymane wyniki? Czy podobne wyniki otrzymasz korzystając ze współczesnych tablic np. TTŻ-PL2018m?

2.6 Niech $0 \le u < 1$. Udowodnij, że
$(\forall x, n \in \mathbb{N})\, [{}_uq_x = uq_x] \Leftrightarrow [{}_{n+u}p_x = (1-u)\,{}_np_x + u\,{}_{n+1}p_x]$.

2.7 Przy założeniu hipotezy HU udowodnij, że $\mathbb{E}T_x = \mathbb{E}K_x + \frac{1}{2}$ oraz $\mathbb{V}ar(T_x) = \mathbb{V}ar(K_x) + \frac{1}{12}$.

2.8 Zakładając, że zachodzi hipoteza jednostajności oraz przyszły czas życia osoby nowourodzonej opisywany jest przez TTŻ-PL2018m oblicz

(i) $\mathbb{P}(T_{40} > 10.25)$;

(ii) ${}_{0.5}p_{21}$;

(iii) ${}_{15|1.5}q_{35}$;

(iv) ${}_{15.5|13}q_{30}$;

(v) $p_{25.5}$;

(vi) prawdopodobieństwo, że 25.5-latek umrze pomiędzy 55.25 i 60.75 rokiem życia.

2.9 Na podstawie tabelki i przy założeniu HU oblicz ${}_{4}p_{25}$ i ${}_{5.75}p_{24}$

x	q_x
24	0.00133
25	0.00132
26	0.00131
27	0.00130
28	0.00130
29	0.00131
30	0.00133

2.10 ^{R} Oszacuj e_0 jeśli czas życia jest opisany przez TTŻ Halleya. Jaki jest możliwy błąd spowodowany urwaniem się tablic na $x = 83$, jeśli przyjmiemy, że $\omega = 100$?

2.11 Załóżmy, że zachodzi hipoteza jednostajności. Ponadto wiadomo, że $p_{40} = 0.9$ oraz $p_{41} = 0.8$. Oblicz $p_{40.5}$.

2.12 * Załóżmy, że spełniona jest hipoteza jednostajności. Oblicz p_{80} jeśli wiadomo, że

$$ {}_{3}p_{80} = 0.7, \qquad {}_{2}p_{80,5} = 0.79, \qquad p_{81} = 0.89. $$

2.13 * Znajdź p_{40} przy założeniu, że oczekiwane dalsze trwanie życia 40-latka wynosi $e_{40} = 28.5$ roku natomiast $e_{41} = 27.7$ roku.

2.14 Posiłkując się poprzednim zadaniem znajdź wzór opisujący zależność między p_x, e_x i e_{x+1} oraz podaj jego interpretację.

2.15 Zdefiniujmy

$$S_x^{(m)} = \frac{1}{m}\lfloor mS_x + 1\rfloor, \tag{2.1}$$

czyli zaokrąglenie S do najmniejszej większej wielokrotności $1/m$. Zmienna $S^{(m)}$ przyjmuje zatem wartości $1/m, 2/m, \ldots, 1$. Wykonaj odpowiedni rysunek obrazujący zależność między S_x i $S_x^{(m)}$.

2.16 Pokaż, że przy założeniu HU $S_x^{(m)}$ ma dyskretny jednostajny rozkład

$$\Pr(S_x^{(m)} = k/m) = 1/m \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{2.2}$$

2.17 Pokaż, że zmienne K_x i $S_x^{(m)}$ są niezależne.

2.18 * *Centralne natężenie śmiertelności* lub *roczny współczynnik natężenia zgonów dla wieku x* definiujemy wzorem

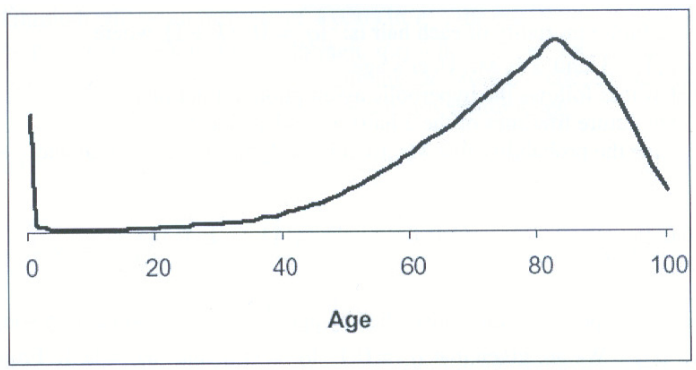
$$m_x = \frac{\int_0^1 l_{x+t}\mu_{x+t}\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 l_{x+t}\,\mathrm{d}t} = \frac{d_x}{L_x},$$

gdzie $L_x = \int_0^1 l_{x+t}\,\mathrm{d}t$. Udowodnij, że przy HU

$$m_x = \frac{q_x}{1 - q_x/2}.$$

2.19 *[SAE05.2001/14][1] Wykres na rys. 2.1 jest związany z ludzką śmiertelnością. Którą z następujących funkcji od wieku x najprawdopodobniej prezentuje ? (A) μ_x, (B) $l_x\mu_x$, (C) l_xp_x, (D) l_x, (E) l_x^2. Odpowiedź uzasadnij.

[1]SAE oznacza zadanie egzaminacyjne Society of Actuaries; 05.2001 ozancza datę natomiast 14 numer zadania.

line 

Rysunek 2.1: