1 Lista 1. Analiza przeżycia

Niech T_x będzie zmienną losową opisującą przyszły czas życia x-latka.

1.1 Udowodnij, że ${}_{u|t}q_x = s_x(u) - s_x(u+t) = {}_{t+u}q_x - {}_uq_x$.

1.2 Udowodnij, że ${}_{u|t}q_x = {}_up_x \cdot {}_tq_{x+u}$.

1.3 Udowodnij, że $\int_0^\infty {}_tp_x \mu_{x+t}\, dt = 1$.

1.4 Udowodnij, że $\mathring{e}_x = \int_0^\infty {}_tp_x dt$.

1.5 Udowodnij, że ${}_kp_x = p_x \cdot \ldots \cdot p_{x+k-1}$ dla $k = 1, 2, \ldots$.

Niech T_0 będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ, opisującą przyszły czas życia 0-latka. Korzystając z tego założenia rozwiąż zadania 1.6 – 1.9.

1.6 Oblicz ${}_tq_x$, $t, x \geq 0$. Jaki rozkład ma zmienna losowa T_x?

1.7 Oblicz

(i) ${}_{u|t}q_x$;

(ii) $\mathring{e}_x$;

(iii) μ_x.

1.8 Używając oznaczeń aktuarialnych oraz przyjmując, że $\lambda = 0.02$, znajdź prawdopodobieństwo, że 20-latek

(i) umrze nie później niż w 50 roku życia,

(ii) dożyje 70 lat,

(iii) umrze między 30 a 40 rokiem życia;

(iv) przeżyje 30 lat a następnie umrze w ciągu kolejnych 40 lat.

1.9 Przyjmując $\lambda = 0.02$ oblicz średni przyszły czas życia $20, 30, 40$ i 100-latka oraz prawdopodobieństwo, że 20-latek przeżyje 10 lat, że 30-latek przeżyje 10 lat, że 40-latek przeżyje 10 lat, że 100-latek przeżyje 10 lat. Jaka matematyczna własność rozkładu wykładniczego odpowiada za uzyskane tutaj wyniki? Czy rozkład wykładniczy jest dobrym modelem przyszłego czasu życia?

1.10 Załóżmy, że T_0 spełnia prawo de Moivre'a z parametrem ω. Udowodnij, że T_x ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, \omega - x]$. Czy prawo de Moivre'a jest dobrym modelem przyszłego czasu życia (albo przynajmniej lepszym od rozkładu wykładniczego)?

1.11 Przy założeniu prawa de Moivre'a z parametrem $\omega = 100$ znajdź (wykonując obliczenia lub odpowiednie rysunki):

(i) ${}_{30}p_{20}$;

(ii) ${}_{30|10}q_{40}$;

1.12 Przy założeniu prawa de Moivre'a wyznacz:

(i) μ_{x+t};

(ii) $\mathring{e}_x$.

1.13 Przy założeniu prawa Gompertza ($\mu_t = Bc^t, B > 0, c > 1$) pokaż, że $s(t) = \exp\{-m(c^t - 1)\}$, gdzie $m = \frac{B}{\log c}$ oraz wyprowadź wzór na ${}_tp_x$.

1.14 Oblicz ${}_{40}p_{20}$ zakładając, że rozkład trwania życia osoby nowo urodzonej podlega prawu

(i) de Moivre'a z parametrem $\omega = 100$;

(ii) Gompertza z parametrami $B = 0.00026155$ i $c = 1.07826$.

1.15 Przy założeniu prawa Makehama ($\mu_t = A + Bc^t, B > 0, A \geq -B, c > 1$) pokaż, że $s(t) = \exp\{-At - m(c^t - 1)\}$, gdzie $m = \frac{B}{\log c}$ oraz wyprowadź wzór na ${}_tp_x$.

1.16 Oblicz $\mathring{e}_{20}$ jeśli wiadomo że $\mu_{20+t} = t$.

1.17 * Niech T_x będzie przyszłym czasem życia x-latka. Załóżmy, że

$$P(T_0 > t) = \left(1 - \frac{t}{100}\right)^{\alpha}, \qquad 0 \leq t \leq 100, \quad \alpha > 0.$$

(i) Zakładając, że $\alpha = 1$, znajdź wartość oczekiwaną przyszłego czasu życia 20-latka.

(ii) Znajdź α jeśli wiadomo, że prawdopodobieństwo, że 20-latek przeżyje jeszcze 10 lat a nastepnie umrze w ciągu kolejnych 10 lat wynosi 0.125.

1.18 * Załóżmy, że funkcja przeżycia wyraża się wzorem

$$s(x) = 1 - \frac{x}{110}$$

dla $x \in [0, 110]$. Przyjmując, że że przyszłe czasy życia są niezależne oblicz prawdopodobieństwo, że w grupie 2 osób w wieku 20 lat

(i) przynajmniej jedna umrze w ciągu następnego roku;

(ii) obydwie umrą w ciągu następnego roku;

(iii) obydwie przeżyją następny rok;

(iv) przynajmniej jedna przeżyje następny rok.

1.19 * Oblicz p_{60}, zakładając, że natężenie śmiertelności jest stałe dla $x \geq 50$ oraz $\mathring{e}_{50} = 40$.

1.20 *[EdA16.11.96] W populacji A natężenie zgonów dane jest wzorem

$$\mu_x^A = \frac{1}{100 - x} \qquad \text{dla} \quad x < 100,$$

a w populacji B wzorem

$$\mu_x^B = \frac{n}{100 - x} \qquad \text{dla} \quad x < 100,$$

gdzie n jest parametrem. Wiadomo ponadto, że osobniki z populacji A mają przed sobą przeciętnie o 10% dłuższy czas życia, niż osobniki z B w tym samym wieku. [Odp. (A) $n = 1.1$, (B) $n = 1.15$, (C) $n = 1.2$, (D) $n = 1.21$, (E) żadna z powyższych.]