

Lista zadań nr 1

Wstęp do Inżynierii Finansowej

Wszystkie polecenia możesz wykonywać w RStudio lub w innym programie/języku programowania. Na początku każdego polecenia wykorzystującego generowanie liczb (pseudo)losowych warto ustalić źródło losowości (w R można to zrobić poleceniem `set.seed(1, kind='Mersenne-Twister')`). Dzięki temu będzie można wygodnie porównać i odtworzyć otrzymane wyniki.

Zadanie 1. Wygeneruj 1000 elementów wektora "falującego", który zachowuje następujący wzór: $0, 1, 2, 1, 0, -1, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$. Następnie policz kumulatywną sumę jego wyrazów (tzn. mając wektor $(X_1, X_2, \dots, X_{1000})$ zamień go na $(X_1, X_1 + X_2, \dots, X_1 + \dots + X_{1000})$). Narysuj na wykresie sam wektor oraz tę sumę. Policzyć odchylenie standardowe obu. Które jest większe i dlaczego?

Zadanie 2. Zaimplementuj funkcje $cp(S, K) = \max(S - K, 0)$ oraz $pp(S, K) = \max(K - S, 0)$. Następnie przy ich użyciu narysuj liniowe wykresy funkcji:

- $cp(S, 80) - cp(S, 120)$,
- $pp(S, 120) - pp(S, 80)$,
- $cp(S, 50) + cp(S, 150) - 2 \cdot cp(S, 100)$,

dla $S \in [0, 200]$. Jakie jest ich minimum, maksimum i dla jakich argumentów jest przyjmowane?

Zadanie 3. Prosty błądzeniem losowym nazywamy proces, który zaczyna w zerze i w każdym kroku z prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{2}$ może pójść o 1 krok w górę albo z prawdopodobieństwem $1 - p$ o 1 krok w dół.

- Wygeneruj i narysuj 1 obserwację prostego błądzenia losowego przez 1000 kroków, a następnie na tym samym wykresie umieść wykres kroczącego maksimum oraz kroczącego minimum dla tego procesu.
- Sprawdź, w których miejscach i ile razy Twój proces przeszedł przez 0.
- Zmień kilkukrotnie źródło losowości i sprawdź jak zmieniają się wyniki.
- Sprawdź, jak zmieniają się wyniki powyższych podpunktów, gdy przyjmiesz $p = 0.4$ lub $p = 0.6$.

Zadanie 4. Napisz prostą funkcję $\text{dis}(c,t)$, która w wyniku zwróci $c \cdot e^{-0.05t}$. Wygeneruj następnie dwa wektory:

- wektor $v1$ składający się z 1000 obserwacji z rozkładu wykładniczego o średniej 5,
- wektor $v2$ składający się z 1000 obserwacji z rozkładu jednostajnego na odcinku $[0, 20]$.

Narysuj wykres zależności $v2$ od $v1$.

Policz sumę wartości zwracanych przez funkcję $\text{dis}(c,t)$ nałożoną na te dwa wektory (tzn. argument c ma pochodzić z wektora $v1$, a argument t z tej samej pozycji w wektorze $v2$). Policz tę sumę dla różnych źródeł losowości. Jakie masz obserwacje? Czy potrafisz zinterpretować, co ta funkcja liczy w kontekście matematyki finansowej? Zweryfikuj licząc teoretyczne wartości oczekiwane, czy otrzymane sumy są poprawne.

Zadanie 5. Utwórz wektor liczb od -1000 do 1000 i dokonaj jego losowej permutacji (nazwijmy ten wektor W). Następnie usuń z niego wszystkie wyrazy, które są mniejsze niż suma wszystkich poprzednich wyrazów ciągu (włącznie z obecnym wyrazem). Policz ile ostatecznie wyrazów zostało w tak zmodyfikowanym ciągu. Następnie zastąp sumę przez maksimum i porównaj wyniki. Narysuj na wykresie wektor W (sprzed usunięcia wyrazów) oraz jego kumulatywną sumę oraz kumulatywne maksimum. Uzasadnij, że uzyskane wyniki liczbowe oddają intuicję widoczne na wykresie.

Zadanie 6. Utwórz macierz wymiaru 500×252 składającą się z obserwacji z rozkładu normalnego o średniej 0.2 i odchyleniu 0.3. Policz sumę narastającą w obrębie każdej kolumny. Narysuj na wykresie wygenerowane trajektorie. Następnie zmień parametr średniej na 0 lub -0.2. Spróbuj zmienić również odchylenie. Opisz co się zmienia i uzasadnij dlaczego.